Intuition

Recap

Suppose, we are to solve the following problem:

$$\min_{x \in S} f(x), \tag{P}$$

When $S = \mathbb{R}^n$, we have the unconstrained problem, which sometimes could be solved with (sub)gradient descent algorithm:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \tag{SD}$$

For this method we have the following bounds:

Bounds derivation

Introduction

В этом разделе мы будем рассматривать работу в рамках какого-то выпуклого множества $S \in \mathbb{R}^n$, так, чтобы $x_k \in S$. Запишем для начала соотношение для итераций:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|(x_{k+1} - x_k) + (x_k - x^*)\|^2 = \\ &= \|x_k - x_{k+1}\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - 2\langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle \\ 2\langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle &= \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \|x_k - x_{k+1}\|^2 \end{aligned}$$

Заметим, что при работе на ограниченном множестве у нас появилась небольшая проблема: x_{k+1} может не лежать в бюджетном множестве. Сейчас мы увидим, почему это является проблемой для выписывания оценок на число итераций: если мы имеем неравенство, записанное ниже, то процесс получения оценок будет абсолютно совпадать с описанными выше процедурами (потому что в случае субградиентного метода $x_k - x_{k+1} = \alpha_k g_k$).

$$\langle \alpha_k g_k, x_k - x^* \rangle \leq \langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle \tag{Target}$$

Однако, в нашем случае мы можем лишь получить (будет показано ниже) оценки следующего вида:

$$\langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x^* \rangle \leq \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x^* \rangle \tag{Forward Target}$$

Это связано с тем, что x_{k+1} нам легче контролировать при построении условного метода, а значит, легче записать на него оценку. К сожалению, привычной телескопической (сворачивающейся) суммы при таком неравенстве не получится. Однако, если неравенство (Forward Target) выполняется, то из него следует следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_k g_k, x_k - x^* \rangle \leq \langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle - \\ - \frac{1}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2}\alpha_k^2 g_k^2 \end{aligned} \tag{Forward Target Fix}$$

Для того, чтобы доказать его, запишем (Forward Target Fix):

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha_k g_k, x_k - x^* \rangle + \langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x_k \rangle \leq \\
\langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle + \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k \rangle
\end{aligned}
$$

Переписывая его еще раз, получаем:

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha_k g_k, x_k - x^* \rangle \leq \langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle - \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x_k \rangle = \\
= \langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle - \frac{1}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x_k - x_{k+1}\|^2 + 2\langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x_k \rangle\right) \leq \\
\leq \langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle - \frac{1}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2}\left(-\alpha_k^2 g_k^2\right) = \\
= \langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle - \frac{1}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 + \frac{1}{2}\alpha_k^2 g_k^2 \blacksquare
\end{aligned}
$$

Итак, пускай мы имеем неравенство (Forward Target) - напомню, что мы его пока не доказали. Теперь покажем, как с его помощью получить оценки на сходимость метода. Для этого запишем неравенство (Forward Target Fix):

$$
\begin{aligned}
2\langle \alpha_k g_k, x_k - x^* \rangle + \|x_k - x_{k+1}\|^2 - \alpha_k^2 g_k^2 \leq \\
\leq 2\langle x_k - x_{k+1}, x_k - x^* \rangle \\
= \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \|x_k - x_{k+1}\|^2
\end{aligned}
$$

$$
2\langle \alpha_k g_k, x_k - x^* \rangle \leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 g_k^2
$$

Если внимательно посмотреть на полученный результат, то это в точности совпадает с исходной точкой доказательства для субградиентного метода в безусловном сеттинге.

Можем сразу получить оценки:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \langle g_k, x_k - x^* \rangle \leq GR\sqrt{T}
$$

$$
f(\overline{x}) - f^* \leq GR\frac{1}{\sqrt{T}}
$$

Таким образом, мы показали, что для метода проекции субградиента справедлива точно такая же оценка на число итераций, если выполняется неравенство (Forward Target) :) Давайте разбираться с ним

Нам следует доказать, что:

$$
\langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x^* \rangle \leq \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x^* \rangle
$$

В более общем случае $\forall y \in S$:

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - y \rangle \leq \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - y \rangle \\
\langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - y \rangle - \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - y \rangle \leq 0
\end{aligned}
$$

Вспомним из неравенства для проекции (равно как и условия оптимальности первого порядка), что $\forall y \in S$ для некоторой гладкой выпуклой минимизируемой функции $g(x)$ в точке оптимума $x \in S$:

$$
\langle \nabla g(x), x - y \rangle \leq 0
$$

В противном бы случае, можно было бы сделать градиентный шаг в направлении $y - x$ и уменьшить значение функции.

Рассмотрим теперь следующую функцию $g(x)$:

$$g(x) = \langle \alpha_k g_k, x \rangle + \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2, \quad \nabla g(x) = \alpha_k g_k + x - x_k$$

И давайте теперь строить условный алгоритм как минимизацию этой функции:

$$x_{k+1} = \arg\min_{x \in S} \left(\langle \alpha_k g_k, x \rangle + \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 \right)$$

Тогда из условия оптимальности:

$$\begin{aligned} \langle \nabla g(x_{k+1}), x_{k+1} - y \rangle &\leq 0 \\ \langle \alpha_k g_k + x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - y \rangle &\leq 0 \\ \langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - y \rangle + \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - y \rangle &\leq 0 \\ \langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - y \rangle - \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - y \rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

Полученное неравенство в точности совпадает с неравенством (Forward Target), которое нам как раз таки и следовало доказать. Таким образом, мы получаем

Algorithm

$$x_{k+1} = \arg\min_{x \in S} \left(\langle \alpha_k g_k, x \rangle + \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 \right)$$

Интересные фишки:

- Такая же скорость сходимости, как и для безусловного алгоритма. (Однако, стоимость каждой итерации может быть существенно больше из за необходимости решать задачу оптимизации на каждом шаге)
- В частном случае $S = \mathbb{R}^n$ в точности совпадает с безусловным алгоритмом (убедитесь)

Adaptive stepsize (without T)

Разберем теперь одну из стратегий того, как избежать знания количества шагов T заранее для подбора длины шага α_k. Для этого зададим “диаметр” нашего множества D:

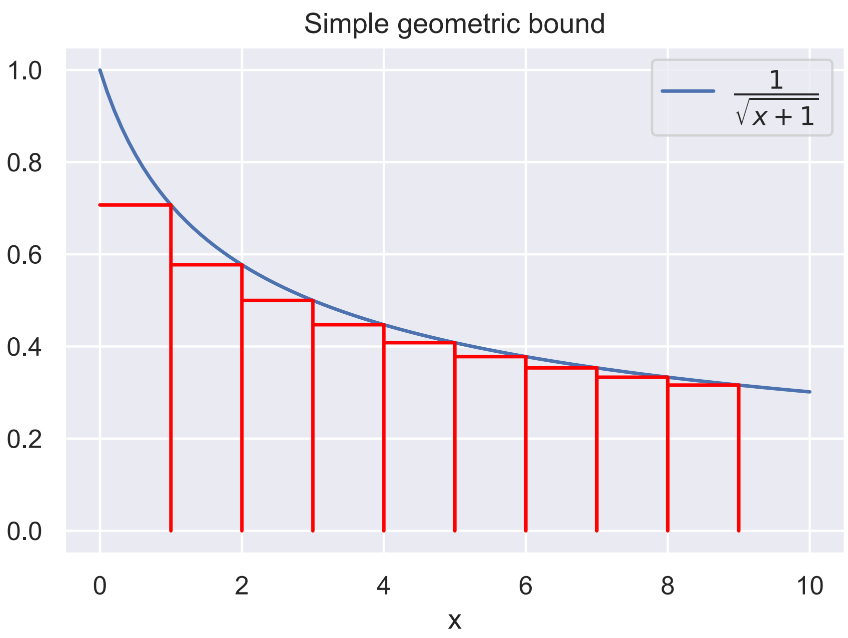
$$D : \{\max_{x,y \in S} \|x - y\| \leq D\}$$

Теперь зададим длину шага на k- ой итерации, как: $\alpha_k = \tau\sqrt{\frac{1}{k+1}}$. Константу $\tau \geq 0$ подберем чуть позже.

Для начала легко заметить, что:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \tau \sum_{k=0}^{T-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \tau \left(1 + \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \leq
$$
$$
\leq \tau \left(1 + \int\limits_{0}^{T-1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx\right) = \tau(2\sqrt{T} - 1)
$$

см. геометрический смысл неравенства ниже:



Возьмем теперь равенство для классического субградиентного метода (БМ) (или неравенство в случае метода проекции субгадиента (УМ)):

$$
\begin{aligned}
2\langle \alpha_k g_k, x_k - x^* \rangle &= \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 g_k^2 \\
\sum_{k=0}^{T-1} \langle g_k, x_k - x^* \rangle &= \sum_{k=0}^{T-1} \left(\frac{\|x_k - x^*\|^2}{2\alpha_k} - \frac{\|x_{k+1} - x^*\|^2}{2\alpha_k} + \frac{\alpha_k}{2} g_k^2 \right) \\
&\leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha_0} - \frac{\|x_T - x^*\|^2}{2\alpha_{T-1}} + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T-1} \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k-1}} \right) \|x_k - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{\alpha_k}{2} g_k^2 \leq \\
&\leq D^2 \left(\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{T-1} \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k-1}} \right) \right) + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \frac{\alpha_k}{2} \leq \\
&\leq \frac{D^2}{2\alpha_{T-1}} + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \frac{\alpha_k}{2} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{D^2}{\tau} \sqrt{T} + \tau G^2 \left(2\sqrt{T} - 1 \right) \right) \leq \\
&\leq DG\sqrt{2T}
\end{aligned}
$$

Где $\tau = \dfrac{D}{G\sqrt{2}}$ - выбран путем минимизации данной оценки по τ.

Таким образом, мы получили, что в случае, когда количество шагов T неизвестно заранее (весьма важное свойство), оценка ухудшается в $\sqrt{2}$ раз. Такие оценки называют anytime bounds.

Online learning:

PSD - Projected Subgradient Descent

$$
R_{T-1} = \sum_{k=0}^{T-1} f_k(x_k) - \min_{x \in S} \sum_{k=0}^{T-1} f_k(x) \leq DG\sqrt{2T} \tag{anytime PSD}
$$

$$
R_{T-1} = \sum_{k=0}^{T-1} f_k(x_k) - \min_{x \in S} \sum_{k=0}^{T-1} f_k(x) \leq DG\sqrt{T} \tag{PSD}
$$

Examples

Least squares with l_1 regularization

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1
$$

Nonnegativity

$$
S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}
$$

l_2 - ball

$$
S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c\| \leq R\}
$$

$$
x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left(A^\top (Ax_k - b) + \lambda \text{sign}(x_k)\right)
$$

Linear equality constraints

$$
S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}
$$

Bounds

Conditions	Convergence rate	Iteration complexity	Type of convergence
Convex Lipschitz-continious function(G)	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	Sublinear
Strongly convex Lipschitz-continious function(G)	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$	Sublinear

References

- Comprehensive presentation on projected subgradient method.
- Great cheatsheet by Sebastian Pokutta
- Lecture on subgradient methods @ Berkley

Метод зеркального спуска является естественным обобщением метода проекции субградиента в случае обобщения l_2 нормы на более общий случай какой-то функции расстояния.

Dual norm:

Определение: Сопряженной нормой $\|\cdot\|_*$ к данной $\|\cdot\|$ называется:

$$\|y\|_* = \max\{\langle y, x\rangle : \|x\| = 1\}$$

Пример: $(\|\cdot\|_p)_* = \|\cdot\|_q, \qquad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Доказательство:

Неравенство Гельдера:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k\, y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ for all } x, y \in \mathbb{C}^n$$

Свойства:

- Двойственная норма $\|\cdot\|_*$ является нормой
- l_2 норма сопряжена сама себе
- Двойственная норма к двойственной норме - исходная норма
- $$(\|\cdot\|_1)_* = \|\cdot\|_\infty, \;\; (\|\cdot\|_\infty)_* = \|\cdot\|_1$$
- Обобщенное неравенство Коши Шварца: $\langle y, x\rangle \leq \|y\|_* \|x\|$, следствие: $\|x\|^2 \pm 2\langle y, x\rangle + \|y\|_*^2 \geq 0$

Bregman divergence

Попробуем интуитивно ввести понятие обобщенного расстояния, именуемого расстоянием Брэгмана. Для каждой точки y она возвращает расстояние этой точки до x - $V_x(y)$. В самом простом случае можно взять $V_x(y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2, \;\; \nabla V_x(y) = y - x$. Рассмотрим уже классическую запись:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - y\|^2 &= \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \|x_k - y\|^2 - 2\langle x_k - x_{k+1}, x_k - y\rangle \\ V_{x_{k+1}}(y) &= V_{x_{k+1}}(x_k) + V_{x_k}(y) - \langle \nabla V_{x_{k+1}(x_k)}, x_k - y\rangle \end{aligned} \tag{Req1}$$

Для вводимого обобщенного расстояния будем требовать выполнения (Req1), кроме того (как будет видно при получении оценок), приятным свойством было бы еще следующее требование:

$$V_x(y) \geq \frac{1}{2}\|x-y\|^2 \tag{Req2}$$

Определение: Дивергенцией (расстоянием) Брэгмана называется функция следующая $V_x(y)$. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - замкнутое выпуклое множество, тогда функция $\phi : S \to \mathbb{R}$ называется прокс-функцией (distance generating function), если ϕ является 1 - сильно выпуклой, т.е.:

$$\phi(y) \geq \phi(x) + \langle \nabla\phi(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}\|y-x\|^2, \qquad \forall x, y \in S$$

Тогда прокс-функцией индуцируется **расстояние Брэгмана**:

$$V_x(y) = \phi(y) - \phi(x) - \langle \nabla\phi(x), y-x\rangle$$

Заметим, что определение сильной выпуклости зависит от выбора прямой нормы $\|\cdot\|$. Это важное замечание, посольку именно это свойство позволит в будущем подстраивать расстояние под геометрию пространства.

Examples

- Выберем норму в прямом пространстве $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, пусть $\phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, тогда расстояние Брэгмана $V_x(y) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2$. Такой выбор совпадает с тем, что мы видели ранее в методе проекции субградиента
- Выберем теперь другую норму $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, пусть $\phi(x) = \sum\limits_{i\in[n]} x_i \log x_i$ - антиэнтропия. Тогда эта функция будет 1 сильно выпукла на выпуклом множестве $S : \left\{x \in S : x \geq 0, \sum\limits_{i\in[n]} x_i = 1\right\}$ (вероятностном симплексе), а соответствующая ей дивергенция Брэгмана: $V_x(y) = \sum\limits_{i\in[n]} y_i \log\frac{y_i}{x_i} = D(y\|x)$ - расстояние Кульбака - Ляйблера.
- Еще немного примеров отсюда:

TABLE 2.1
Common seed functions and the corresponding divergences.

Function name	$\phi(x)$	$\operatorname{dom}\phi(x)$	$V_x(y)$
Squared norm	$\frac{1}{2}x^2$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{1}{2}(x-y)^2$
Shannon entropy	$x\log x - x$	$[0,+\infty)$	$x\log\frac{x}{y} - x + y$
Bit entropy	$x\log x + (1-x)\log(1-x)$	$[0,1]$	$x\log\frac{x}{y} + (1-x)\log\frac{1-x}{1-y}$
Burg entropy	$-\log x$	$(0,+\infty)$	$\frac{x}{y} - \log\frac{x}{y} - 1$
Hellinger	$-\sqrt{1-x^2}$	$[-1,1]$	$(1-xy)(1-y^2)^{-1/2} - (1-x^2)^{1/2}$
ℓ_p quasi-norm	$-x^p \quad (0<p<1)$	$[0,+\infty)$	$-x^p + p\,xy^{p-1} - (p-1)\,y^p$
ℓ_p norm	$\|x\|^p \quad (1<p<\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\|x\|^p - p\,x\operatorname{sgn} y\,\|y\|^{p-1} + (p-1)\,\|y\|^p$
Exponential	$\exp x$	$(-\infty,+\infty)$	$\exp x - (x-y+1)\exp y$
Inverse	$1/x$	$(0,+\infty)$	$1/x + x/y^2 - 2/y$

TABLE 2.2
Common exponential families and the corresponding divergences.

Exponential family	$\psi(\theta)$	$\operatorname{dom}\psi$	$\mu(\theta)$	$\phi(x)$	Divergence
Gaussian (σ^2 fixed)	$\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2$	$(-\infty,+\infty)$	$\sigma^2\theta$	$\frac{1}{2\sigma^2}x^2$	Euclidean
Poisson	$\exp\theta$	$(-\infty,+\infty)$	$\exp\theta$	$x\log x - x$	Relative entropy
Bernoulli	$\log(1+\exp\theta)$	$(-\infty,+\infty)$	$\frac{\exp\theta}{1+\exp\theta}$	$x\log x + (1-x)\log(1-x)$	Logistic loss
Gamma (α fixed)	$-\alpha\,\log(-\theta)$	$(-\infty,0)$	$-\alpha/\theta$	$-\alpha\log x + \alpha\log\alpha - \alpha$	Itakura–Saito

Свойства

- Аксиома тождества $V_x(x) = 0$
- Совместимость с Евклидовой нормой: $V_x(y) \geq \frac{1}{2}\|x-y\|^2 \geq 0$
- (Не)равенство треугольника: $\langle -\nabla V_x(y), y - z\rangle = V_x(z) - V_y(z) - V_x(y)$

Первые два свойства очевидны из определения. Докажем третье:

$$
\begin{aligned}
\langle -\nabla V_x(y), y - z\rangle &= \langle \nabla\phi(x) - \nabla\phi(y), y - z\rangle = \\
&= (\phi(z) - \phi(x) - \langle\nabla\phi(x), z - x\rangle) \\
&- (\phi(z) - \phi(y) - \langle\nabla\phi(y), z - y\rangle) \\
&- (\phi(y) - \phi(x) - \langle\nabla\phi(x), y - x\rangle) \\
&= V_x(z) - V_y(z) - V_x(y)
\end{aligned}
$$

Возвращение к истокам

Пусть задано выпуклое замкнутое множество $S \in \mathbb{R}^n$, кроме того, есть алгоритм оптимизации, возвращающий последовательность точек $x_1, \ldots, x_k, \ldots$. Тогда запишем (не)равенство треугольника для расстояния Брэгмана, полагая $y = x_{k+1}, x = x_k$ и произвольный $z \in S$ (который мы в дальнейшем для целостности изложения будем обозначать y)

$$
\begin{aligned}
\langle -\nabla V_{x_k}(x_{k+1}), x_{k+1} - z\rangle &= V_{x_k}(z) - V_{x_{k+1}}(z) - V_{x_k}(x_{k+1}) \\
\langle -\nabla V_{x_k}(x_{k+1}), x_{k+1} - y\rangle &= V_{x_k}(y) - V_{x_{k+1}}(y) - V_{x_k}(x_{k+1}) \qquad \text{(baseMD)}
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученные равенства:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \langle -\nabla V_{x_k}(x_{k+1}), x_{k+1} - y \rangle = V_{x_0}(y) - V_{x_T}(y) - \sum_{k=0}^{T-1} V_{x_k}(x_{k+1})
$$

Имея ввиду полученное уравнение, давайте, наконец, попробуем сформулировать метод **зеркального спуска**:

$$
x_{k+1} = \arg\min_{x \in S} \left(\langle \alpha_k g_k, x \rangle + V_{x_k}(x) \right)
$$

Посмотрим внимательнее на условие проекции для точки x_{k+1}:

$$
\langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - y \rangle + \langle \nabla V_{x_k}(x_{k+1}), x_{k+1} - y \rangle \leq 0
$$

$$
\langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - y \rangle \leq -\langle \nabla V_{x_k}(x_{k+1}), x_{k+1} - y \rangle
$$

Попробуем теперь получить наше базовое неравенство, используя (baseMD):

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha_k g_k, x_k - y \rangle & \leq -\langle \nabla V_{x_k}(x_{k+1}), x_{k+1} - y \rangle - \langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x_k \rangle = \\
& = V_{x_k}(y) - V_{x_{k+1}}(y) - V_{x_k}(x_{k+1}) - \langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x_k \rangle \leq \\
& \leq V_{x_k}(y) - V_{x_{k+1}}(y) - \frac{1}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \langle \alpha_k g_k, x_{k+1} - x_k \rangle \leq \\
& \leq V_{x_k}(y) - V_{x_{k+1}}(y) + \left(\langle \alpha_k g_k, x_k - x_{k+1} \rangle - \frac{1}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 \right) \leq \\
& \leq V_{x_k}(y) - V_{x_{k+1}}(y) + \frac{\alpha_k^2}{2}\|g_k\|_*^2
\end{aligned}
$$

ТЕЛЕСКОПИРУЕМ

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} \langle \alpha_k g_k, x_k - y \rangle & \leq V_{x_0}(y) - V_{x_T}(y) + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{\alpha_k^2}{2}\|g_k\|_*^2 \\
& \leq V_{x_0}(y) + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{\alpha_k^2}{2}\|g_k\|_*^2 \\
& \leq M + \frac{\alpha^2 G^2 T}{2}
\end{aligned}
$$

Здесь мы подразумеваем $\|g_k\|_* \leq G$ равномерно по k, а $V_{x_0}(y) \leq M$. В итоге:

$$
\begin{aligned}
f(\overline{x}) - f^* = f\left(\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T-1} x_k\right) - f^* &\le \frac{1}{T}\left(\sum_{k=0}^{T-1} f(x_k) - f^*\right) \\
&\le \frac{1}{T}\left(\sum_{k=0}^{T-1}\langle g_k, x_k - x^*\rangle\right) \\
&\le \frac{M}{\alpha T} + \frac{\alpha G^2}{2} \le \sqrt{\frac{2MG^2}{T}}
\end{aligned}
$$

Выбирая шаг $\alpha_k = \alpha = \sqrt{\dfrac{2M}{G^2 T}}$

Алгоритм зеркального спуска (mirror descent):

$x_{k+1} = \arg\min\limits_{x \in S} \left(\langle \alpha_k g_k, x\rangle + V_{x_k}(x)\right)$

Интересные фишки:

- Такая же скорость сходимости, как и для метода проекции субградиента.
- Работает в существенно более широком классе практических задач

Онлайн версия

Совершенно ясно, что в наших оценках на каждом шаге может быть новая функция $f_k(x)$ на заданном классе. Поэтому, аналогичные оценки получаются и для онлайн постановки:

$$
R_{T-1} = \sum_{k=0}^{T-1} f_k(x_k) - \min_x \sum_{k=0}^{T-1} f_k(x) \le \sqrt{2MG^2T}
$$

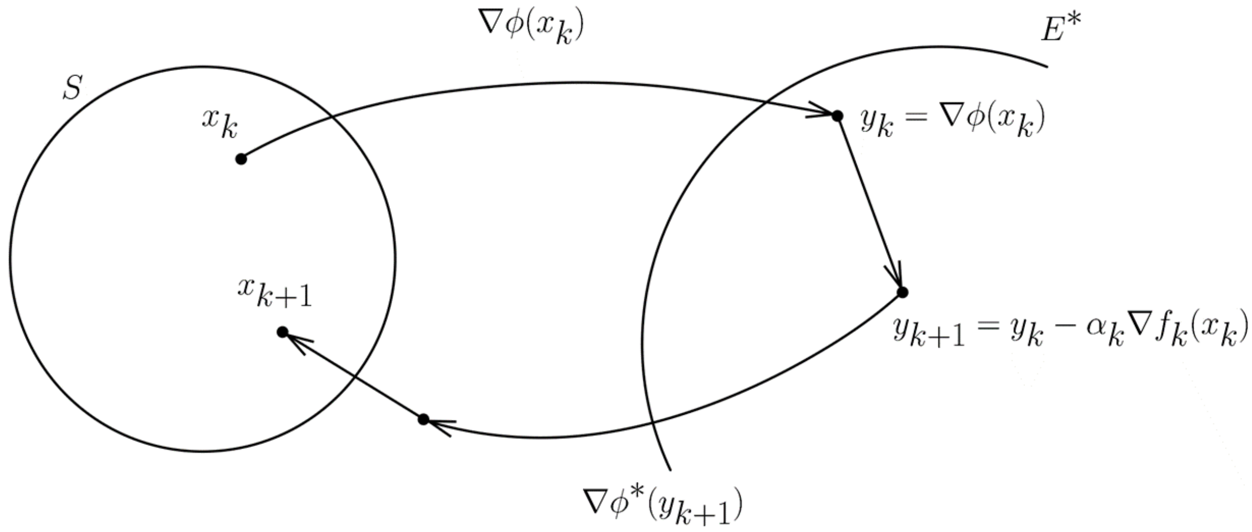
$$
\overline{R_{T-1}} = \frac{1}{T} R_{T-1} \le \sqrt{\frac{2MG^2}{T}}
$$

Еще одна интерпретация

Давайте покажем, что полученный алгоритм имеет еще одну очень интуитивную интерпретацию:

1. $y_k = \nabla \phi(x_k)$ Отображение в сопряженное пространство с помощью функции $\nabla \phi(x)$

2. $y_{k+1} = y_k - \alpha_k \nabla f_k(x_k)$ Градиентный шаг в сопряженном пространстве
3. $x_{k+1} = \arg\min\limits_{x \in S} V_{\nabla \phi^*(y_{k+1})}(x)$ Обратное отображение с помощью функции $\nabla \phi^*(x)$ и проекция на бюджетное множество



Для доказательства эквивалентности таких записей, следует сначала доказать факт того, что:

$$(\nabla \phi(x))^{-1} = \nabla \phi^*(y)$$

Для этого пусть $y = \nabla \phi(x)$. Заметим, что для сопряженной функции справедливо неравенство Фенхеля - Юнга: $\phi^*(y) + \phi(x) \geq xy$, в случае, если $\phi(x)$ - дифференцируема, такое преобразование называется преобразованием Лежандра и выполняется равенство: $\phi^*(y) + \phi(x) = xy$. Дифференцируя равенство по y, получаем $\nabla \phi^*(y) = x$. Таким образом,

$$\nabla \phi^*(y) = \nabla \phi^*(\nabla \phi(x)) = x, \qquad \nabla \phi(x) = \nabla \phi(\nabla \phi^*(y)) = y$$

Доказательство:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \arg\min_{x \in S} \left\{ V_{\nabla \phi^*(y_{k+1})}(x) \right\} = \\
&= \arg\min_{x \in S} \left\{ \phi(x) - \phi(\nabla \phi^*(y_{k+1})) - \langle \nabla \phi(\nabla \phi^*(y_{k+1})), x - \nabla \phi^*(y_{k+1}) \rangle \right\} = \\
&= \arg\min_{x \in S} \left\{ \phi(x) - \langle y_{k+1}, x \rangle \right\} = \\
&= \arg\min_{x \in S} \left\{ \phi(x) - \langle \nabla \phi(x_k) - \alpha_k g_k, x \rangle \right\} = \\
&= \arg\min_{x \in S} \left\{ \phi(x) - \phi(x_k) - \langle \nabla \phi(x_k), x \rangle + \langle \alpha_k g_k, x \rangle \right\} = \\
&= \arg\min_{x \in S} \left\{ V_{x_k}(x) + \langle \alpha_k g_k, x \rangle \right\}
\end{aligned}
$$

В последней строчке мы пришли к той формулировке, которую писали раньше. Заметим так же, еще одну интересную концепцию:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \arg\min_{x \in S} \left(\langle \alpha_k g_k, x \rangle + V_{x_k}(x) \right) \\
&= \arg\min_{x \in S} \left(\langle g_k, x \rangle + \frac{1}{\alpha_k} V_{x_k}(x) \right) \\
&= \arg\min_{x \in S} \left(f(x_k) + \langle g_k, x \rangle + \frac{1}{\alpha_k} V_{x_k}(x) \right)
\end{aligned}
$$

Здесь левая часть минимизируемого выражения представляет собой аппроксимацию первого порядка, а правая часть представляет собой проекционный член.

НАФИГА?

Резонный вопрос, ведь в случае, если мы выбрали $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$ Евклидову норму и Евклидово расстояние, то этот метод в точности совпадает с тем, что мы уже называем метод проекции субградиента.

Значит, надо предоставить сценарий, когда МЗС работает лучше, давайте рассмотрим $S = \Delta_n$ - вероятностный симплекс, а так же следующее расстояние Брэгмана $V_x(y) = \sum_{i \in [n]} y_i \log \frac{y_i}{x_i} = D(y \| x)$. Норма в прямом пространстве при этом $\|\|_1$, а в сопряженном - $\|\|_\infty$. Кроме того, для заданной дивергенции Брэгмана справедливо:

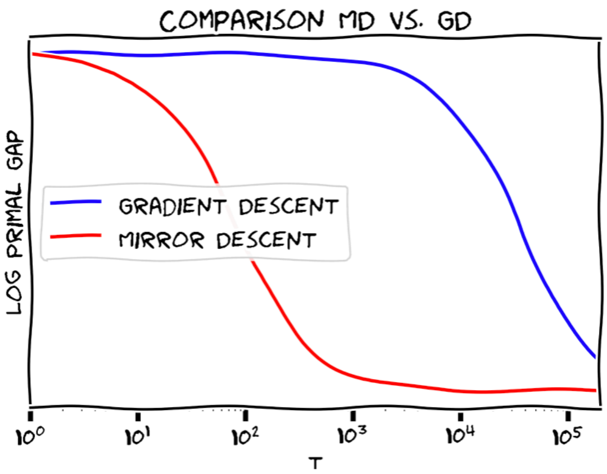
$$
x_0 = (1/n, \ldots, 1/n) \ \rightarrow \ V_{x_0}(x) \leq \log n \ \ \forall x \in \Delta_n
$$

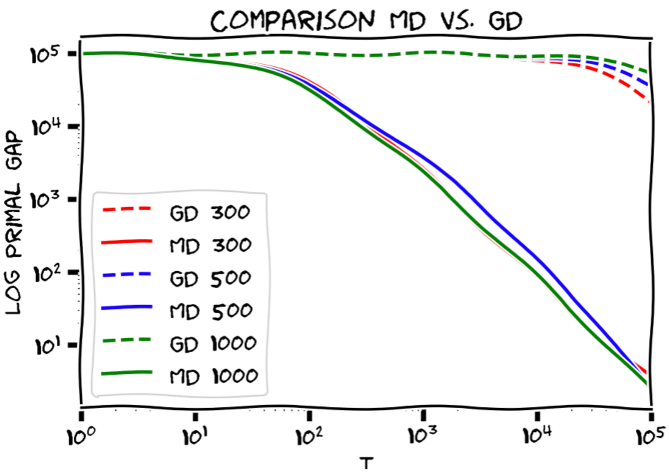
Тогда алгоритм зеркального спуска запишется в виде:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \arg\min_{x \in S} \left(\langle \alpha_k g_k, x \rangle + V_{x_k}(x) \right) \\
&= \arg\min_{x \in S} \left(\langle \alpha_k g_k, x \rangle + \sum_{i \in [n]} x_i \log \frac{x_i}{x_{k_i}} \right) \\
&= x_k \cdot \frac{e^{-\alpha_k g_k}}{\|x_k \cdot e^{-\alpha_k g_k}\|_1}
\end{aligned}
$$

А оценки с учетом того, что $M = \log n, \|g_k\|_\infty \leq G$ запишутся, как:

$$
f(\overline{x}) - f^* \leq \sqrt{\frac{2\log(n)G^2}{T}}
$$

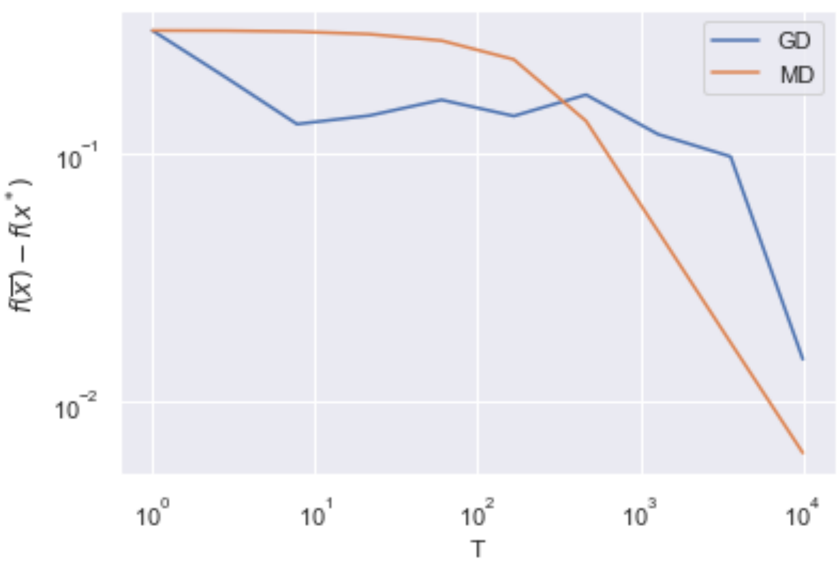





```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline
import seaborn as sns
sns.set()



Ts = np.logspace(0,4, 10)

m = 10
n = 1000
A = np.random.randn(m, n)
x_true = np.random.randn(n)
x_true[x_true < 0] = 0
x_true = x_true/(np.linalg.norm(x_true, 1))
```

```
b = A@x_true

x0 = np.ones(n)/n



def f(x):
    return np.linalg.norm(A@x - b, 1)

def grad(x):
    return np.sum(A.T * np.sign(A@x - b), axis=1)

def mirror_descent(x0, grad, T):
    n = len(x0)
    M = np.log(n)
#     G = np.linalg.norm(A,np.inf)*1+np.linalg.norm(b,np.inf)
#     alpha = np.sqrt(2*M/(G**2*T))
    alpha = 0.0001
    xk = x0
    sequence = []
#     print('MD %.3f'%alpha)
    for i in range(int(T)):
        sequence.append(xk)
        g = grad(xk)
        xk = xk * np.exp(-alpha * g) / np.sum(xk * np.exp(-alpha * g))
    return sequence

def projection_subgradient_descent(x0, grad, T):
    n = len(x0)
    M = 0.5
#     G = np.linalg.norm(A,2)*1+np.linalg.norm(b,2)
#     alpha = np.sqrt(2*M/(G**2*T))
    alpha = 0.0001
#     print('GD %.3f'%alpha)
    xk = x0
    sequence = []
    for i in range(int(T)):
        sequence.append(xk)
        g = grad(xk)
        xk = xk - alpha*g
```

```
        xk[xk<0] = 0
        xk = xk/(np.linalg.norm(xk, 1))
    return sequence

result_md = []
result_gd = []

for T in Ts:
    print(T)
    md_T = mirror_descent(x0, grad, T)
    gd_T = projection_subgradient_descent(x0, grad, T)

    x_md = np.mean(md_T, axis = 0)
    x_gd = np.mean(gd_T, axis = 0)

    result_md.append(f(x_md) - f(x_true))
    result_gd.append(f(x_gd) - f(x_true))


plt.loglog(Ts, result_gd, label = 'GD')
plt.loglog(Ts, result_md, label = 'MD')
plt.xlabel('T')
plt.ylabel(r'$f(\overline{x}) - f(x^*)$')
plt.legend()
```



Projection

Distance between point and set

The distance d from point $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ to closed set $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$d(\mathbf{y}, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Projection of a point on set

Projection of a point $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ on set $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is a point $\pi_S(\mathbf{y}) \in S$:

$$\|\pi_S(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x} \in S$$

- if set is open, and a point is beyond this set, then its projection on this set does not exist.
- if a point is in set, then its projection is the point itself
- $$\pi_S(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$
- Let $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - convex closed set. Let the point $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\pi \in S$. Then if for all $\mathbf{x} \in S$ the inequality holds:

  $$\langle \pi - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \pi \rangle \geq 0,$$

  then π is the projection of the point $\mathbf{y}$ on S, so $\pi_S(\mathbf{y}) = \pi$.
- Let $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - affine set. Let we have points $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ and $\pi \in S$. Then π is a projection of point $\mathbf{y}$ on S, so $\pi_S(\mathbf{y}) = \pi$ if and only if for all $\mathbf{x} \in S$ the inequality holds:

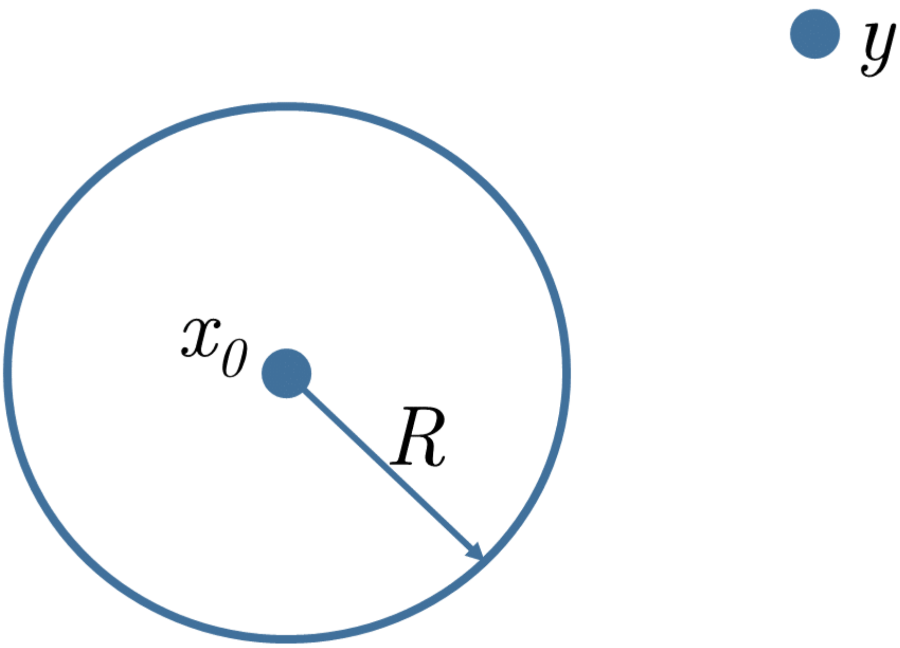
  $$\langle \pi - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \pi \rangle = 0$$

- $\textbf{Sufficient conditions of existence of a projection}$. If $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - closed set, then for all points exists projection on set S.
- $\textbf{Sufficient conditions of uniqueness of a projection}$. Если $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - convex set, then projection for all point on set S is unique (if exists).

EXAMPLE 1

Find $\pi_S(y) = \pi$, if $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$, $y \notin S$

Solution:



- Build a hypothesis from the figure: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$
- Check the inequality for a convex closed set: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\left(x_0 - y + R\frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(x - x_0 - R\frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right) =$$

$$\left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|}\right) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2}(y - x_0)^T \left((x - x_0)\|y - x_0\| - R\left(y - x_0\right)\right) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|}\left((y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\|\right) =$$

$$\left(R - \|y - x_0\|\right)\left(\frac{(y - x_0)^T(x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R\right)$$

- The first factor is negative for point selection y. The second factor is also negative, which follows from the Cauchy-Bunyakovsky inequality:

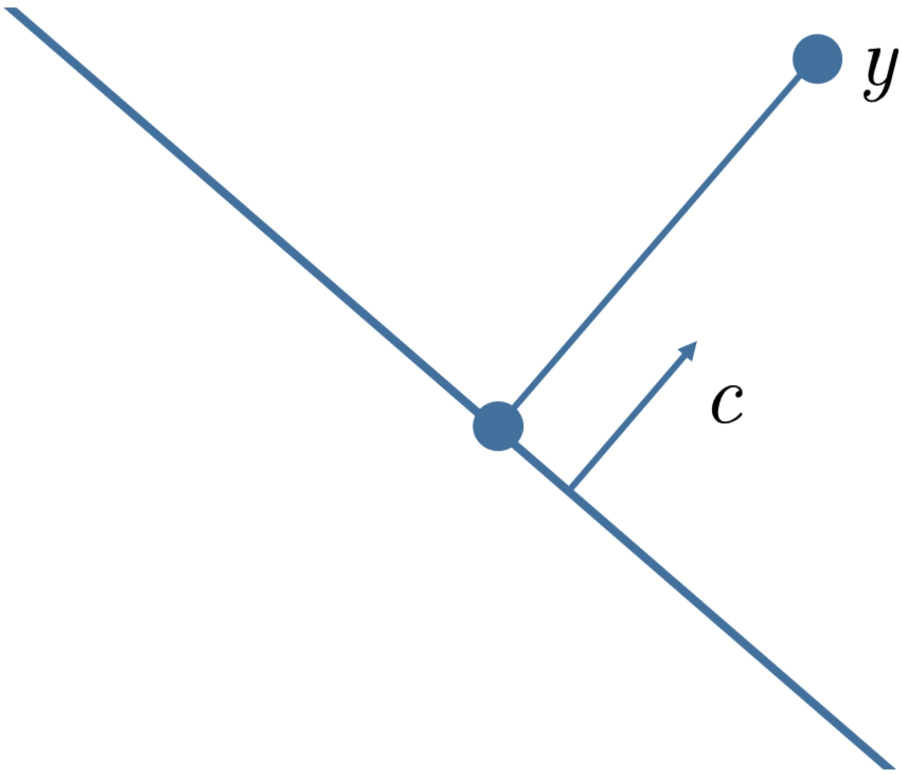
$$(y - x_0)^T(x - x_0) \leq \|y - x_0\|\|x - x_0\|$$

$$\frac{(y-x_0)^T(x-x_0)}{\|y-x_0\|} - R \leq \frac{\|y-x_0\|\|x-x_0\|}{\|y-x_0\|} - R = \|x-x_0\| - R \leq 0$$

EXAMPLE 2

Find $\pi_S(y) = \pi$, if $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$.

Solution:



- Build a hypothesis from the figure: $\pi = y + \alpha c$. Coefficient α is chosen so that $\pi \in S$: $c^T\pi = b$, so:

$$c^T(y + \alpha c) = b$$

$$c^T y + \alpha c^T c = b$$

$$c^T y = b - \alpha c^T c$$

- Check the inequality for a convex closed set: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha c^T(x - y - \alpha c) =$$

$$\alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2(c^T c) =$$

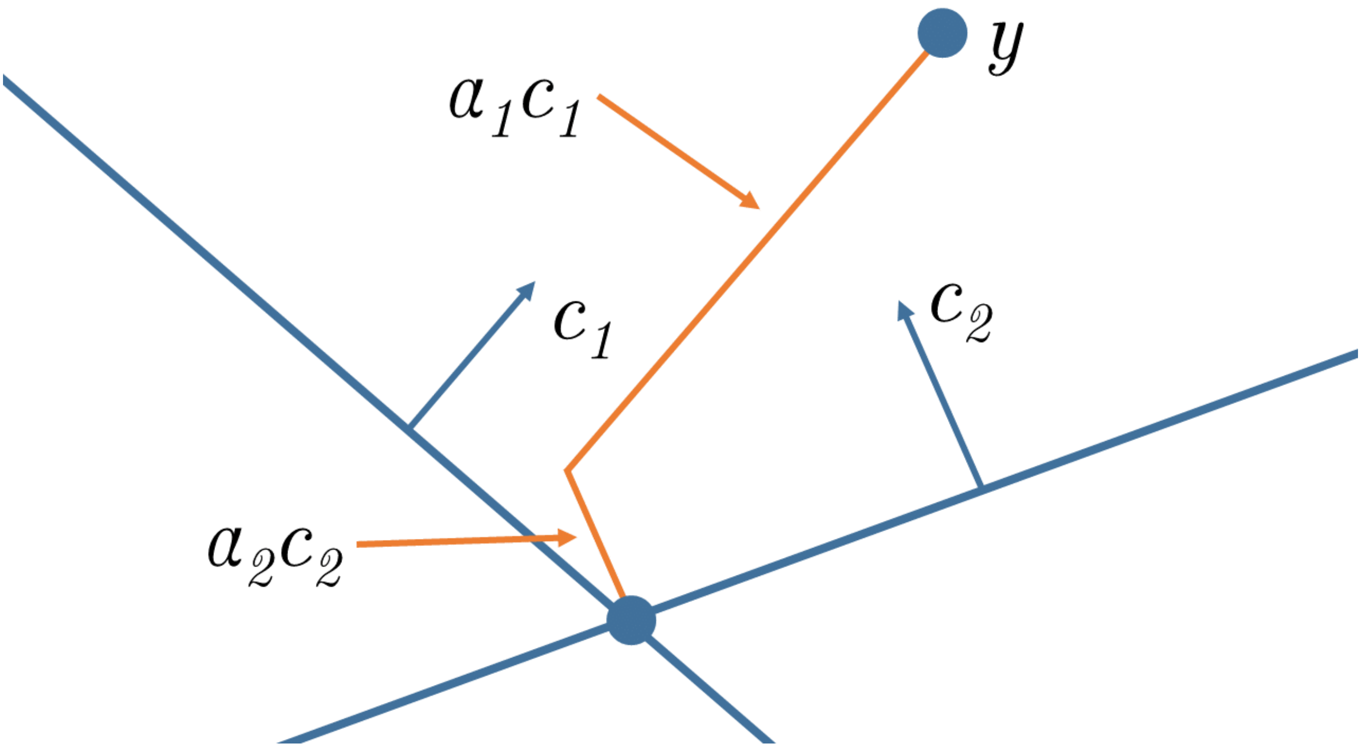
$$\alpha b - \alpha(b - \alpha c^T c) - \alpha^2 c^T c =$$

$$\alpha b - \alpha b + \alpha^2 c^T c - \alpha^2 c^T c = 0 \geq 0$$

EXAMPLE 3

Find $\pi_S(y) = \pi$, if $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$, $y \notin S$.

Solution:



- Build a hypothesis from the figure: $\pi = y + \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i A_i = y + A^T\alpha$. Coefficient α is chosen so that $\pi \in S$: $A\pi = b$, so:

$$A(y + A^T\alpha) = b$$

$$Ay = b - AA^T\alpha$$

- Check the inequality for a convex closed set: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + A^T\alpha - y)^T(x - y - A^T\alpha) =$$

$$\alpha^T A(x - y - A^T\alpha) =$$

$$\alpha^T(Ax) - \alpha^T(Ay) - \alpha^T(AA^T\alpha) =$$

$$\alpha^T b - \alpha^T(b - AA^T\alpha) - \alpha^T AA^T\alpha =$$

$$\alpha^T b - \alpha^T b + \alpha^T AA^T\alpha - \alpha^T AA^T\alpha = 0 \geq 0$$