Subgradient and subdifferential

Motivation

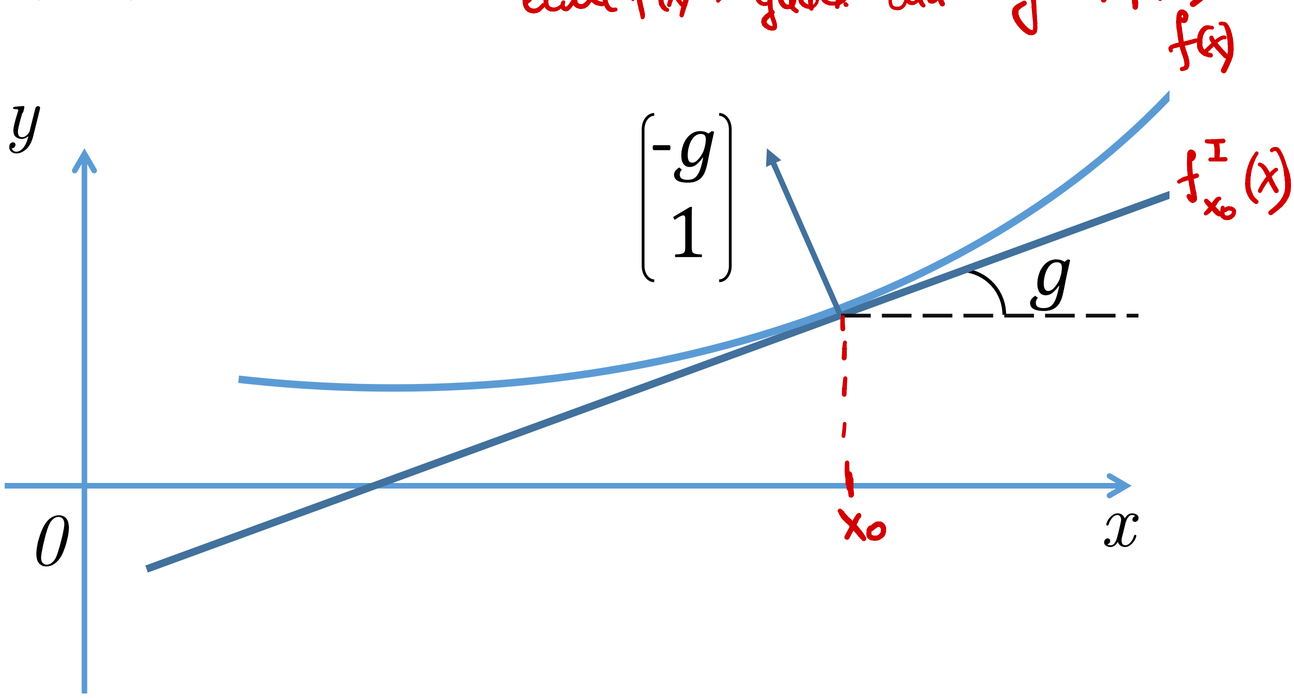
Важным свойством непрерывной выпуклой функции $f(x)$ является то, что в выбранной точке x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполнено неравенство:

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle}$$

$f(x) = f^I_{x_0}(x)$

для некоторого вектора g, то есть касательная к графику функции является *глобальной* оценкой снизу для функции.

если $f(x)$ - дифф-ма $g = \nabla f(x_0)$



- Если $f(x)$ - дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы :)

Не хочется лишаться такого вкусного свойства.

Subgradient

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle}$$

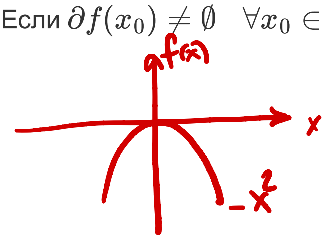
Subdifferential

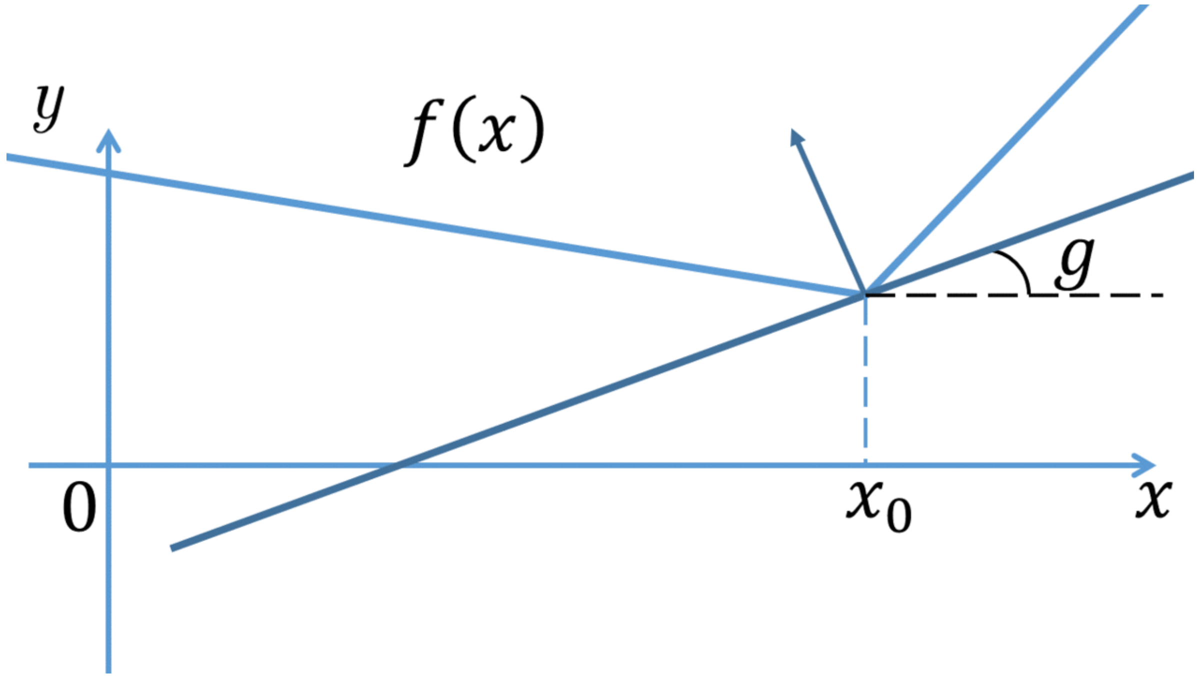
Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** f в x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

\partial f (x_0)

- Если $x_0 \in \mathbf{ri} S$, то $\partial f(x_0)$ выпуклое компактное множество.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 $\iff$ $\boxed{\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)}$
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ - выпукла на S.

потому что дифф. критерий выпуклости I порядка





Moreau - Rockafellar theorem (subdifferential of a linear combination)

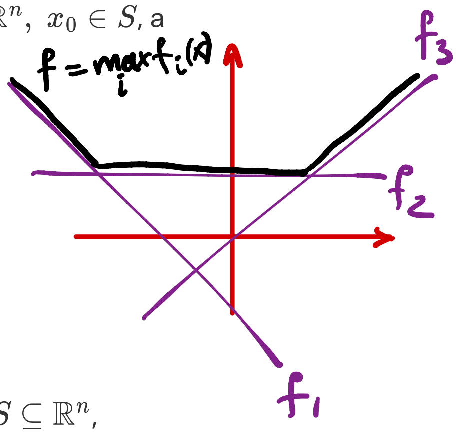
Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i,\ i = \overline{1,n}$.
Тогда, если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathbf{ri} S_i \neq \emptyset$ то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(x),\ a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ и

$\partial\left(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\right) =$
$= a_1 \cdot \partial f_1(x) + a_2 \partial f_2(x)$

$$\boxed{\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{S_i} f_i(x)}$$

Dubovitsky - Milutin theorem (subdifferential of a point-wise maximum)

Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n,\ x_0 \in S$, а поточечный максимум определяется как $f(x) = \max\limits_i f_i(x)$. Тогда:



$$\boxed{\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},}$$

где $I(x) = \{ i \in [1:m] : f_i(x) = f(x) \}$

Chain rule for subdifferentials

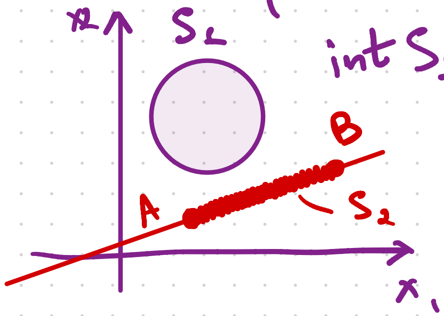
Пусть $g_1, \ldots, g_m$ - выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$ - образованная из них вектор - функция, φ - монотонно неубывающая выпуклая функция на открытом выпуклом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^m$, причем $g(S) \subseteq U$. Тогда субдифференциал функции $f(x) = \varphi\left(g(x)\right)$ имеет вид:

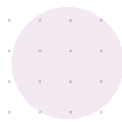
$$\partial f(x) = \bigcup_{p \in \partial\varphi(u)} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \partial g_i(x) \right),$$

где $u = g(x)$

$\mathrm{int}(S)$ — мн-во всех внутренних точек

$$= \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \subseteq S\}$$



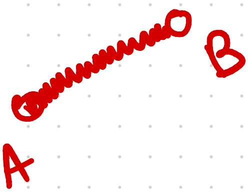
$\mathrm{int}\, S_1 \rightarrow$ 

$\mathrm{ri}(S)$
$\mathrm{relint}(S)$
$\mathrm{rint}(S)$
relative interior(S)

$\mathrm{int}\, S_2 = ?$
$\varnothing$

$$= \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0 \quad (B_\varepsilon(x) \cap \mathrm{aff}(S)) \subseteq S\}$$

$\mathrm{relint}\, S_2 \neq \varnothing$



В частности, если функция φ дифференцируема в точке $u = g(x)$, то формула запишется так:

$$
\partial f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) \partial g_i(x)
$$

Subdifferential calculus

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, for $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i - выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T \partial f(Ax+b)$, f - выпуклая функция

Examples

Концептуально, различают три способа решения задач на поиск субградиента:

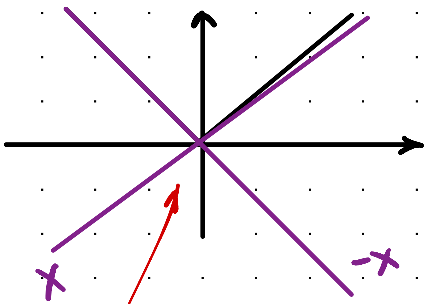
- Теоремы Моро - Рокафеллара, композиции, максимума
- Геометрически
- По определению

1

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$ $= \max(-x, x)$

$\partial f = \partial(\max(-x, x)) =$

$$
= \begin{cases} -1, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}
$$



в $x=0$ $\begin{cases} f(x) = x \\ f(x) = -x \end{cases}$

по теор. Д.-М.:

$\partial f(0) = \text{conv}(\partial x \cup \partial(-x)) =$

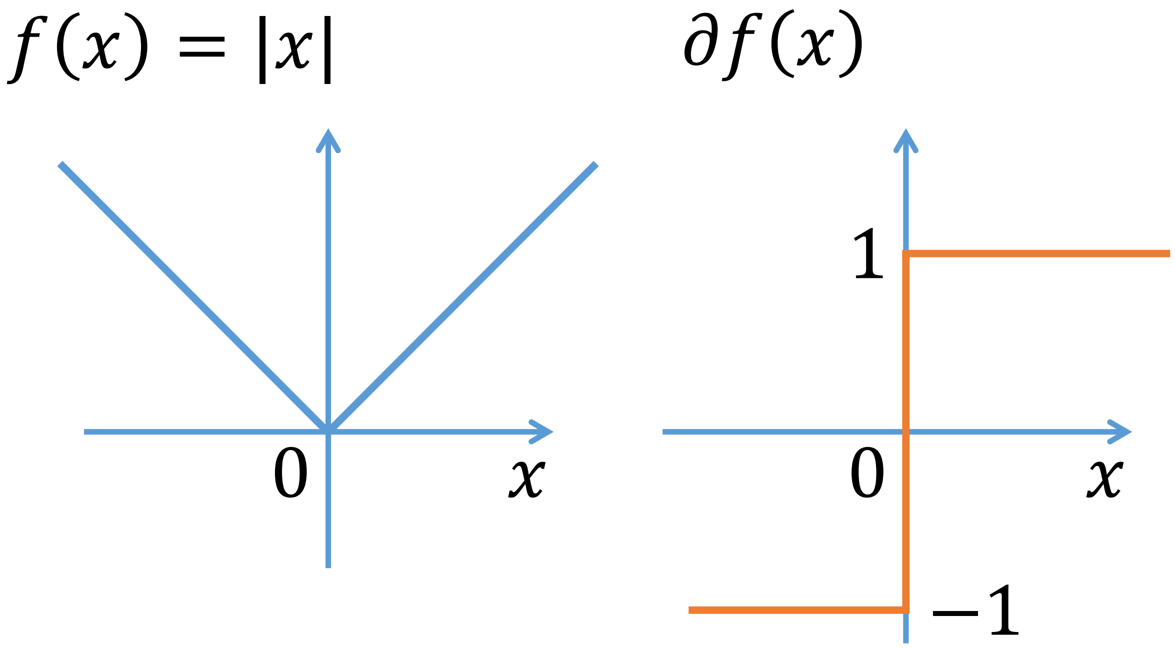
$\text{conv}(\{1\} \cup \{-1\}) =$

$= [-1, 1]$

Решение:

Решить задачу можно либо геометрически (в каждой точке числовой прямой указать угловые коэффициенты прямых, глобально подпирающих функцию снизу), либо по теореме Моро - Рокафеллара, рассмотрев $f(x)$ как композицию выпуклых функций:

$$
f(x) = \max\{-x, x\}
$$



2

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \underbrace{|x-1|}_{f_1(x)} + \underbrace{|x+1|}_{f_2(x)}$

$\partial f = \partial f_1 + \partial f_2$

Теорема Моро - Рокафеллара

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} -1, & x<1 \\ [-1,1], & x=1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$\partial f_2 = \begin{cases} -1, & x<-1 \\ [-1,1], & x=-1 \\ 1, & x>-1 \end{cases}$$

$$\partial f = \begin{cases} -2, & x<-1 \\ [-2,0], & x=-1 \\ 0, & -1<x<1 \\ [0,2], & x=1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$$

Решение:

Совершенно аналогично применяем теорему Моро - Рокафеллара, учитывая следующее:

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ [-1;1], & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \qquad \partial f_2(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ [-1;1], & x = -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\partial f(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ [-2;0], & x = -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ [0;2], & x = 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

3

Найти $\partial f(x)$, если $\boxed{f(x) = [\max(0, f_0(x))]^q}$. Здесь $f_0(x)$ - выпуклая функция на открытом выпуклом множестве S, $q \geq 1$.

$\partial f = ?$

$$\partial f = q \cdot (\max(0, f_0(x)))^{q-1} \cdot \underline{\partial \max(0, f_0(x))}$$

$f_0(x) < 0$: 0

$f_0(x) > 0$: $\partial f_0(x)$

$f_0(x) = 0$: $\text{conv}\{\{0\}, \partial f_0(x)\}$

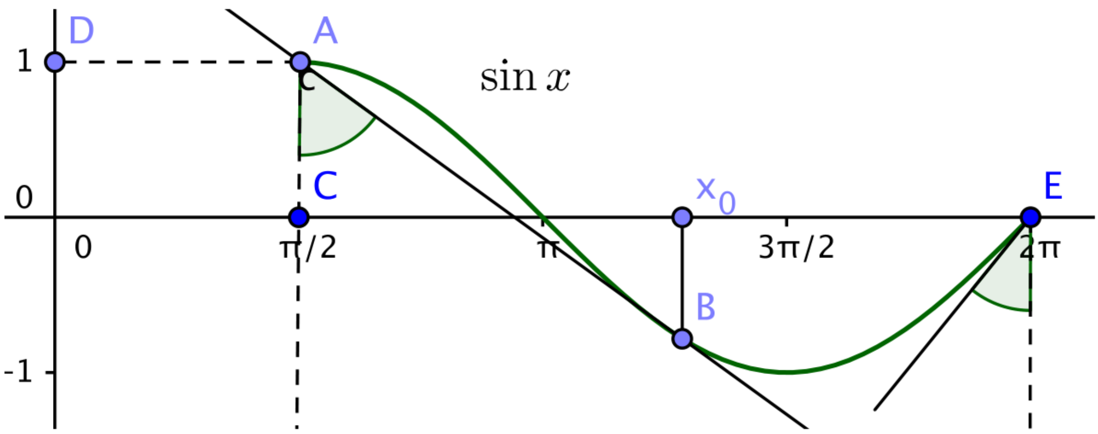
Решение:
Согласно теореме о композиции (функция $\varphi(x) = x^q$ - дифференцируема), а $g(x) = \max(0, f_0(x))$ имеем: $\partial f(x) = q(g(x))^{q-1}\partial g(x)$

По теореме о поточечном максимуме:

$$\partial g(x) = \begin{cases} \partial f_0(x), & f_0(x) > 0, \\ \{0\}, & f_0(x) < 0 \\ \{a \mid a = \lambda a',\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ a' \in \partial f_0(x)\}, & f_0(x) = 0 \end{cases}$$

4

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \sin x, x \in [\pi/2; 2\pi]$



$$\partial f_G(x) = \begin{cases} (-\infty, \cos x_0], & x = \pi/2; \\ \varnothing, & x \in (\pi/2, x_0); \\ \cos x, & x \in [x_0, 2\pi); \\ [1, +\infty], & x = 2\pi. \end{cases}$$

5

f_1 f_2

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |c_1^\top x| + |c_2^\top x|$

$f_1 = |c_1^T x|$

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} c_1 & c_1^T x > 0 \\ \mathrm{conv}\{(-c_1),(c_1)\} & c_1^T x = 0 \\ -c_1 & c_1^T x < 0 \end{cases}$$

$0 \le \theta \le 1$

$\theta \cdot (-c_1) + (1-\theta) c_1$

$1 - 2\theta c_1$

∂f_2

Решение: Пусть $f_1(x) = |c_1^\top x|$, а $f_2(x) = |c_2^\top x|$. Так как эти функции выпуклы, субдифференциал их суммы равен сумме субдифференциалов. Найдем каждый из них:

$$\partial f_1(x) = \partial\left(\max\{c_1^\top x, -c_1^\top x\}\right) = \begin{cases} -c_1, & c_1^\top x < 0 \\ \mathbf{conv}(-c_1; c_1), & c_1^\top x = 0 \\ c_1, & c_1^\top x > 0 \end{cases}$$

$$\partial f_2(x) = \partial\left(\max\{c_2^\top x, -c_2^\top x\}\right) = \begin{cases} -c_2, & c_2^\top x < 0 \\ \mathbf{conv}(-c_2; c_2), & c_2^\top x = 0 \\ c_2, & c_2^\top x > 0 \end{cases}$$

Далее интересными представляются лишь различные взаимные расположения векторов c_1 и c_2, рассмотрение которых предлагается читателю.

6

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$; $\|x\|_\infty = \max_{i\in(1,n)} |x_i|$

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \|x\|_1$

$(\|x\|_p)_* = \|x\|_q$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\|x\|_1$ $x \in \mathbb{R}$ $= |x|$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ — Евклид

пусть $s_i = \{\pm 1\}$

лин. ф-ция

$s^T x$

$g_s(x) = s_1 x_1 + \ldots + s_n x_n$

$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

если взять поточечный максимум лин. функций $g_s(x)$, то $\|x\|_1$

Решение: По определению

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \boxed{s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n}$$

в одномерном $\| |x|$ 2^1 функций

в $\mathbb{R}^2$ 2^2 функций

$x_1 + x_2$
$-x_1 + x_2$
$-x_1 - x_2$
$x_1 - x_2$

Рассмотрим эту сумму как поточечный максимум линейных функций по x: $g(x) = s^\top x$, где $s_i = \{-1, 1\}$. Каждая такая функция однозначно определяется набором коэффициентов $\{s_i\}_{i=1}^n$.

есть 2^n лин. ф-ций $g_s(x)$

выбор S_i определяется только X_i

$X_i > 0$

$S_i X_i \to \max_{S_i}$

$S_i = 1$

$X_i < 0$

$S_i = -1$

$X_i = 0$

$\begin{cases} S_i = -1 \\ S_i = 1 \end{cases}$

Тогда по теореме Дубовицкого - Милютина, в каждой точке

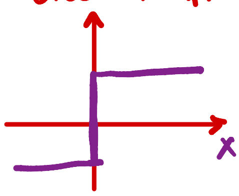
$$\boxed{\partial f = \mathbf{conv}\left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial g_i(x) \right)}$$

Заметим, что $\partial g(x) = \partial \left(\max\{s^\top x, -s^\top x\} \right) = \begin{cases} -s, & s^\top x < 0 \\ \mathbf{conv}(-s; s), & s^\top x = 0. \\ s, & s^\top x > 0 \end{cases}$

Причем, правило выбора "активной" функции поточечного максимума в каждой точке следующее:

- Если j-ая координата точки отрицательна, $s_i^j = -1$
- Если j-ая координата точки положительна, $s_i^j = 1$
- Если j-ая координата точки равна нулю, то подходят оба варианта коэффициентов и соответствующих им функций, а значит, необходимо включать субградиенты этих функций в объединение в теореме Дубовицкого - Милютина.

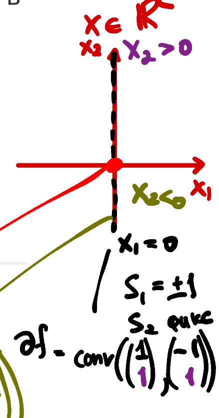
Ответ: $x \in \mathbb{R}$



В итоге получаем ответ:

$$\boxed{\partial f(x) = \{g \;:\; \|g\|_\infty \leq 1, \quad g^\top x = \|x\|_1\}}$$

$s^T x = \|x\|_1$



References

- [Lecture Notes for ORIE 6300: Mathematical Programming I by Damek Davis](#)

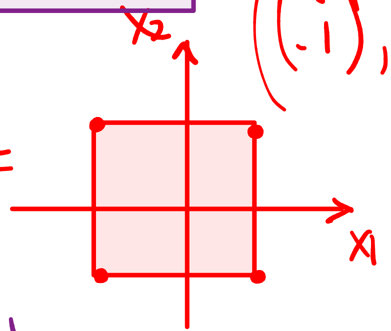
$f(x) = \|x\|$

упр.

$$\boxed{\partial f = \{g : \|g\|_* \le 1, \; g^T x = \|x\|\}}$$

Conv $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right)$

$\partial(\|x\|_1)(0) =$



шар в $\|\ \|_\infty$ норме

$X_1 = 0$

$X_2 > 0$

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

$g_1 x_1 + g_2 x_2 = |x_1| + |x_2|$

$g_1 \cdot 0 + g_2 \cdot x_2 = 0 + x_2$

$g_2 = 1$

$\forall g_1$

$\left\| \begin{matrix} g_1 \\ 1 \end{matrix} \right\|_\infty \le 1 \Rightarrow -1 \le g_1 \le 1$

$f(x) = \|x\|$

$f^*(y) = 0, \; \|y\|_* \le 1$