Выпуклость: $\forall x_1, x_2 \in S \rightarrow \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S$

S – вып. мн-во

$0 \le \theta \le 1$

$f(x)$: $f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2)$

$\boxed{\nabla^2 f(x) \succeq 0}$ выпукл. функция

сильно выпукл. $\boxed{\nabla^2 f(x) \succeq \mu \cdot I}$

$\mu > 0$ константа сильн. вып.

Conjugate set

Conjugate (dual) set

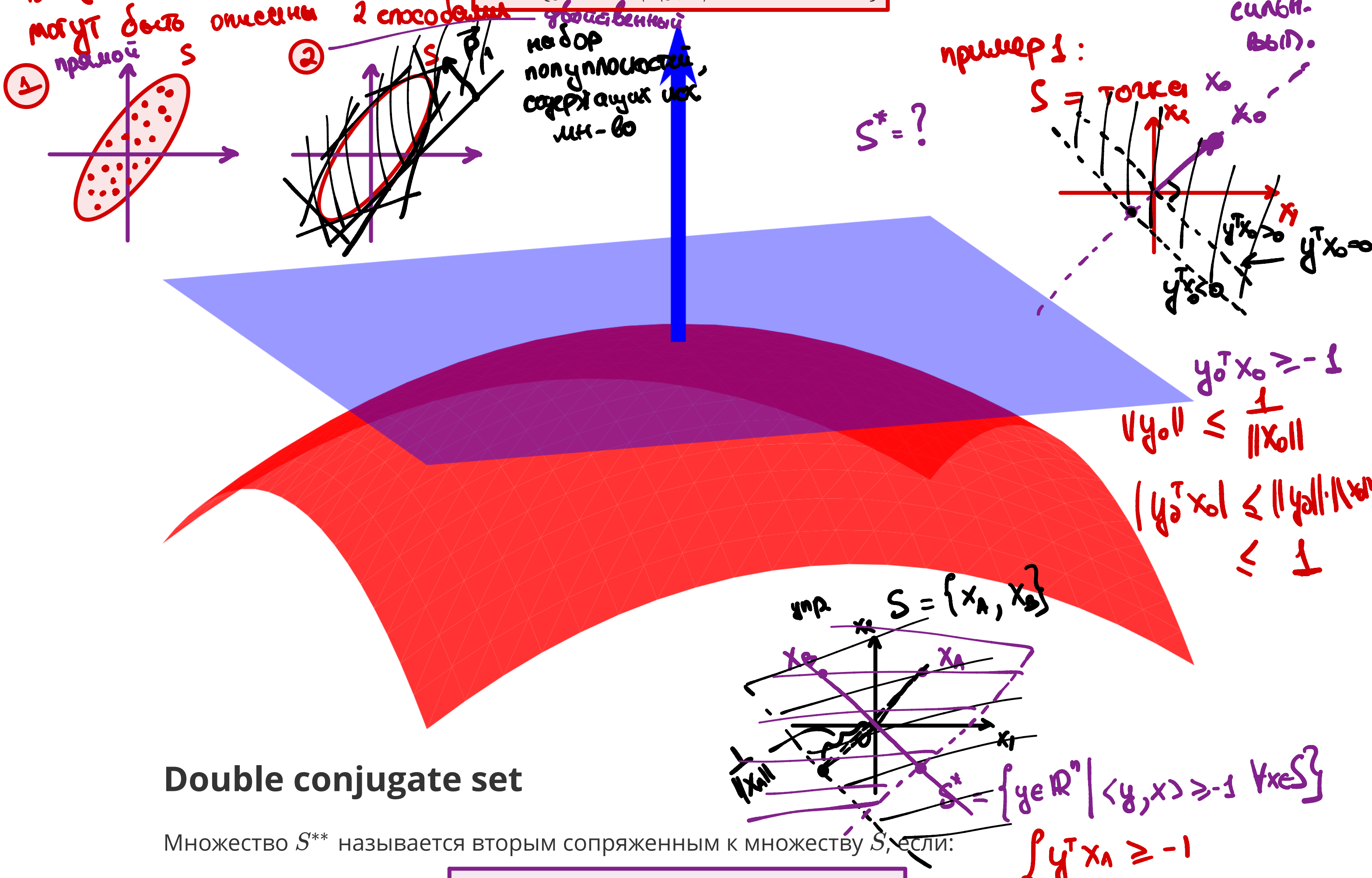
Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - произвольное непустое множество. Тогда сопряженное к нему множество определяется, как:

$$\boxed{S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \ge -1 \;\; \forall x \in S\}}$$

Выпуклые мн-ва, содержащие 0 могут быть описаны 2 способами

① прямой

② обобщенный набор полуплоскостей, содержащих их мн-во



пример 1: S = точка x_0

$S^* = ?$

$y_0^T x_0 \ge -1$

$\|y_0\| \le \frac{1}{\|x_0\|}$

$|y_0^T x_0| \le \|y_0\| \cdot \|x_0\| \le 1$

упр $S = \{x_1, x_2\}$

$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \ge -1 \;\; \forall x \in S\}$

$\begin{cases} y^T x_1 \ge -1 \\ y^T x_2 \ge -1 \end{cases}$

Double conjugate set

Множество S^{**} называется вторым сопряженным к множеству S, если:

$$\boxed{S^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \ge -1 \;\; \forall x \in S^*\}}$$

пример 3: S, $S^* = ?$

$y \cdot x \ge -1$

$S^* = [-\frac{1}{2}; +\infty)$

$-100 \in S^*$

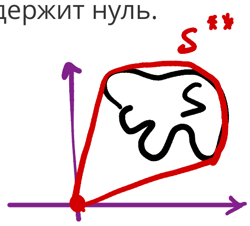
Inter-conjugate and self-conjugate sets

- Множества S_1 и S_2 называются **взаимосопряженными**, если $S_1^* = S_2, S_2^* = S_1$.
- Множество S называется **самосопряженным**, если $S^* = S$

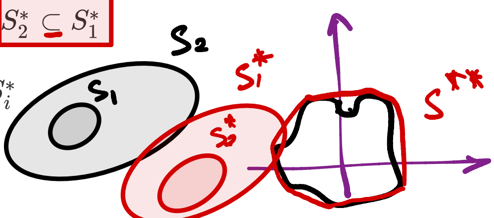
Properties

- Сопряженное множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}}$$



- Если $\boxed{S_1 \subseteq S_2}$, то $\boxed{S_2^* \subseteq S_1^*}$
- $\left(\bigcup\limits_{i=1}^m S_i\right)^* = \bigcap\limits_{i=1}^m S_i^*$



- Если S - замкнуто, выпукло, включает 0, то $S^{**} = S$
- $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

Examples

1

Доказать, что $S^* \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} \left(\overline{S}\right)^*$

Решение:

1) $S \subseteq \overline{S} \Rightarrow \left(\overline{S}\right)^* \subseteq S^*$

2) возьмём $\forall y \in S^*$ $\quad \boxed{y^T x \geq -1}$ $\quad \forall x \in S$

$y \in \left(\overline{S}\right)^*$ $\quad \boxed{y^T \overline{x} \geq -1}$ $\quad \forall \overline{x} \in \overline{S}$

доказать

$\overline{S} = S \cup \partial S$

по теореме о предельном переходе

$\forall \overline{x} \in \partial S$

$y^T \overline{x} \geq -1$

ч.т.д.

2

Доказать, что $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$

Решение:

3

Доказать, что если $B(0, r)$ - шар радиуса r по некоторой норме с центром в нуле, то $\underbrace{(B(0, r))^*}_{X} = \underbrace{B(0, 1/r)}_{Y}$

$X \subseteq Y \quad \forall x \in X \to x \in Y$ (1)

$Y \subseteq X \quad \forall y \in Y \to y \in X$ (2)

Решение:

1) Возьмём $\forall x \in X$ $\quad x: \quad x^T \cdot z \geq -1 \quad \forall z \in B(0,r)$

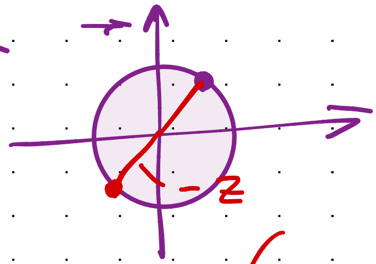
$\|z\| \leq r$

доказать $\Rightarrow x \in Y \quad \|x\| \leq \frac{1}{r}$

$$|x^T z| \leq \|x\| \cdot \|z\| \leq \|x\| \cdot r$$

если $x^T z \geq -1$ $\quad$ ч.т.д.

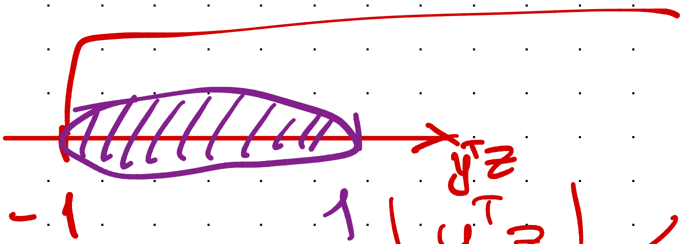
если $\|x\| > \frac{1}{r} = R$ $\quad x = -\frac{z}{\|z\|} \cdot R$



2) Возьмём $\forall y \in Y$ $\quad \|y\| \leq \frac{1}{r}$ $\quad \rightarrow y \in (B(0,r))^*$

$\forall z \in B(0,r) \rightarrow \|z\| \leq r$

$y^T z \geq -1$



$$|y^T z| \leq \|y\| \cdot \|z\| \leq \frac{1}{r} \cdot r \leq 1$$

ч.т.д.

Dual cones

Сопряженным конусом к конусу K называется такое множество K^*, что:

$$\boxed{K^* = \{y \mid \langle x, y\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}}$$

Чтобы показать, что это определение непосредственно следует из теории выше вспомним, что такое сопряженное множество и что такое конус $\forall \lambda > 0$

$$\boxed{\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \;\; \forall x \in S\}} \rightarrow \{\lambda y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \quad \forall x \in S\}$$

$\lambda x \in S$

Опр. Конус K: $\forall x \in K \rightarrow \lambda x \in K \quad \forall \lambda \geq 0$

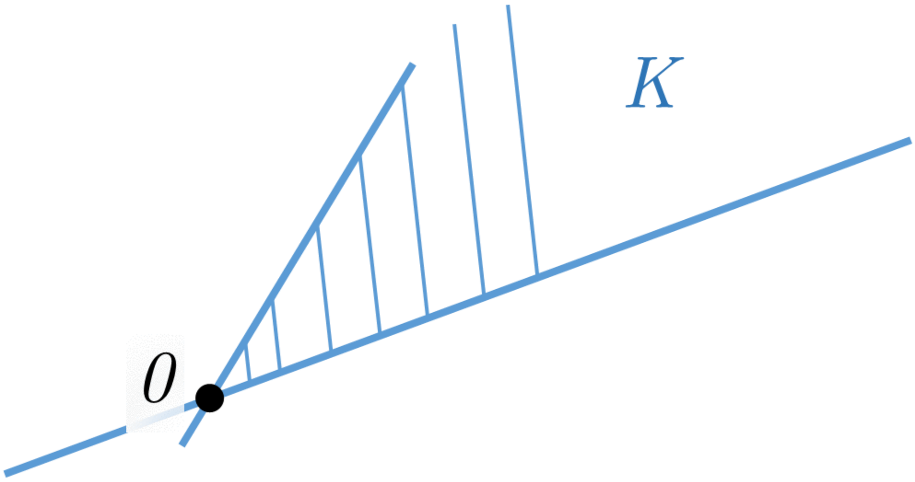
$y^T x \geq -1$

$y^T \lambda x \geq -1 \quad | : \lambda \neq 0$

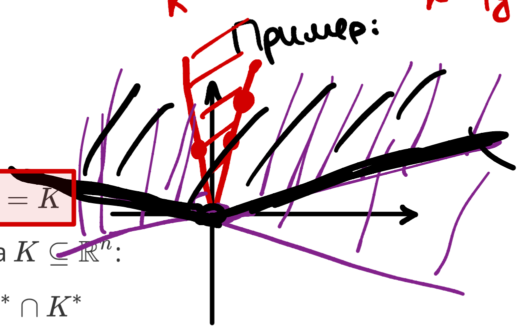
$y^T x \geq -\frac{1}{\lambda}$

$\lambda \rightarrow \infty$

если строить K^*



$K^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \geq 0 \; \forall x \in K\}$



Dual cones properties

- Если K - замкнутый выпуклый конус. Тогда $\boxed{K^{**} = K}$
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$:

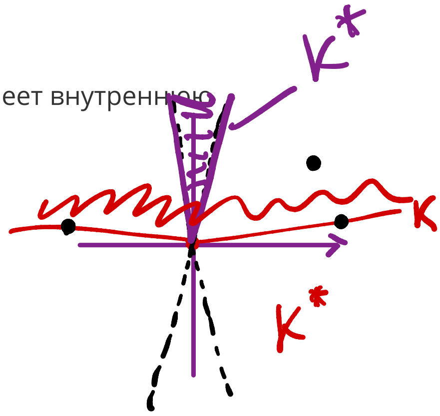
$$(S + K)^* = S^* \cap K^*$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$, тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^m K_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$. Пусть так же, их пересечение имеет внутреннюю точку, тогда:

$$\left(\bigcap_{i=1}^m K_i \right)^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$



Examples

4

$x_1 \geq x_2 \geq 0$

x_3

Найти сопряженнй конус для монотонного неотрицательного конуса:

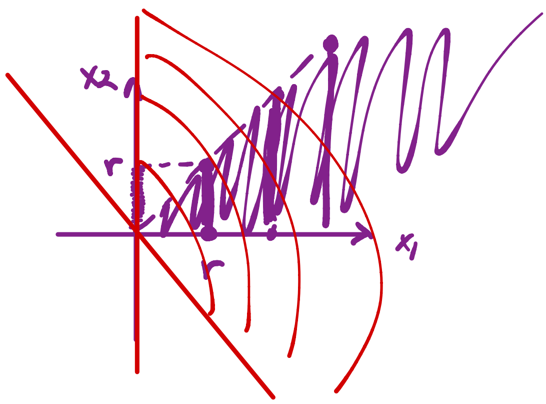
$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}$$

Решение:

$K^* = ?$

$y^T x \geq 0$

$\sum_{i=1}^n y_i x_i \geq 0$



$$x^T y = x_1 y_1 \underbrace{- x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_1}_{0} + x_2 y_2 + \dots$$

$$x^T y = (x_1 - x_2) y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + \dots$$

$$x^T y = (x_1 - x_2) y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_2 + x_3 y_2 + \dots$$

$$(x_1 - x_2) y_1 + x_2 y_1 + (x_2 - x_3) y_2 + x_3 y_2 + \dots$$

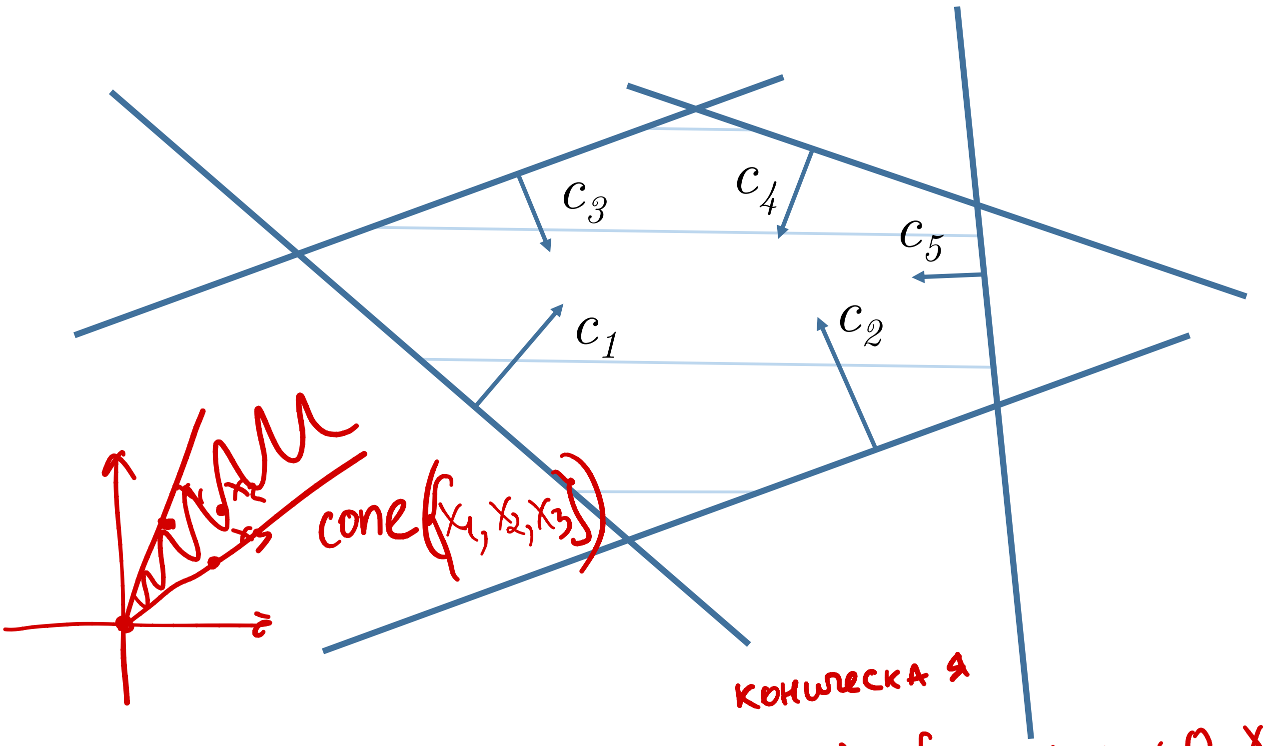
$$(x_1 - x_2) y_1 + (x_2 - x_3) y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + (x_4 - x_3) y_3$$

Polyhedra

Множество решений системы линейных неравенств и равенств представляет собой многогранник:

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а неравенство - поэлементное.



коническая

$$\text{cone}(x_{k+1}, \dots, x_m) = \{\theta_{k+1} x_{k+1} + \dots + \theta_m x_m\}, \quad \theta \geq 0$$

Теорема:

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$\boxed{S = \mathbf{conv}(x_1, \ldots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \ldots, x_m)}$$

является полиэдр (многогранник):

$$\boxed{S^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1,m} \right\}}$$

Доказательство:

$$x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots\cdots$$

$$(x_1 - x_2) y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + (x_3 - x_4)(y_1 + y_2 + y_3) +$$

$$\underline{x_1 y_1} - x_2 y_1 + x_2 y_1 - x_3 y_1 + \underline{x_2 y_2} - x_3 y_2 + \cdots x_n(y_1 + \cdots + y_n)$$

$\vee$

0

$$K^* = ?$$

$$K^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_1 + y_2 \geq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 0 \\ \vdots \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq 0 \end{cases} \right\}$$

- Пусть $S = X, S^* = Y$. Возьмем некоторый $p \in X^*$, тогда $\langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}$. В то же время для любых $\theta > 0, i = \overline{k+1,m}$:

$$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \to \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$

$$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \to \langle p, x_i \rangle \geq 0$$

  Значит, $p \in Y \to X^* \subset Y$

- Пусть, напротив, $p \in Y$. Для любой точки $x \in X$:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

  Значит:

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum_{i=k+1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum_{i=1}^{k} \theta_i (-1) + \sum_{i=1}^{k} \theta_i \cdot 0 = -1$$

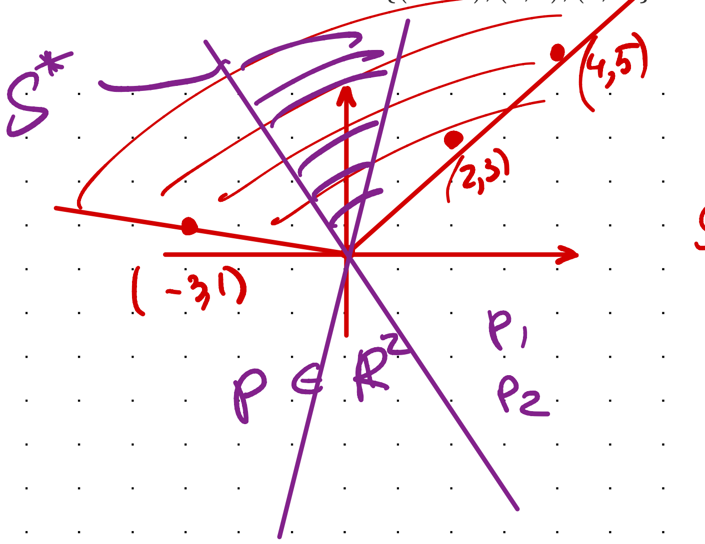
  Значит, $p \in X^* \to Y \subset X^*$

5

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{cone}\{(-3,1),(2,3),(4,5)\}$$

Решение:



$S = \text{cone}((-3,1),(4,5))$

S^* сопр. теореме

$$\begin{cases} p^T \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ p^T \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3p_1 + p_2 \geq 0 \\ 4p_1 + 5p_2 \geq 0 \end{cases}$$

Лемма (теорема) Фаркаша (Фаркаша - Минковского)

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ Ax = b, x \geq 0$$

$$2)\ pA \geq 0, \langle p, b \rangle < 0$$

$Ax = b$ при $x \geq 0$ означает, что b лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы A

$pA \geq 0,\ \langle p, b \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором b и конусом из столбцов матрицы A.

Следствие:

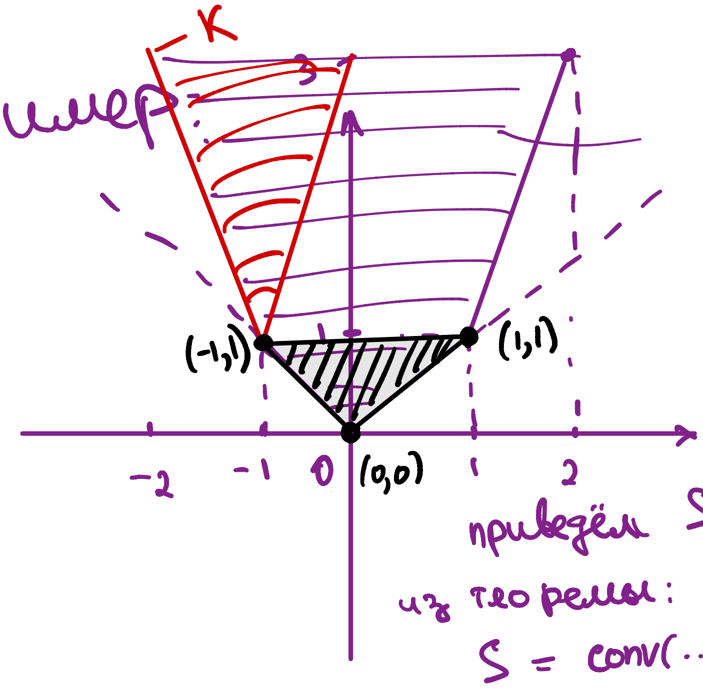
Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ Ax \le b$$

$$2)\ pA = 0, \langle p, b\rangle < 0, p \ge 0$$

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.

Пример:



S

$S^* = ?$

приведём S к виду из теоремы: $S = \text{conv}(\dots) + \text{cone}(\dots)$

$S = \nabla + \bigvee$

$$S = \text{conv}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + \text{cone}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$S^* = \{p \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} 0\cdot p_1 + 0\cdot p_2 \ge -1 \\ -1\cdot p_1 + 1\cdot p_2 \ge -1 \\ 1\, p_1 + 1\cdot p_2 \ge -1 \\ 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 \ge 0 \\ -1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 \ge 0 \end{cases}$$