⓪ Повторение:

	вып.	сильн. вып.
GD:	$O\left(\frac{1}{k}\right)$	$O\left(\left(1-\frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $O\left(\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\right)^k\right)$
SD:	$O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$O\left(\frac{1}{k}\right)$
AGD:	$O\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$O\left(\left(1-\sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^k\right)$ $O\left(\left(\frac{\sqrt{\varkappa}-1}{\sqrt{\varkappa}}\right)^k\right)$

$\varkappa = \frac{L}{\mu}$

Heavy ball

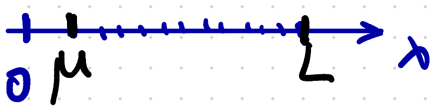
Nesterov Accelerated Gradient

$\boxed{\text{квадр. задача}}$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}x^TAx - b^Tx + c \qquad A \in \mathbb{S}^n_{++}$$

$$\nabla f = Ax - b \qquad \lambda_{min}(A) = \mu$$

$$\nabla^2 f = A \succ 0 \qquad \lambda_{max}(A) = L$$



$$1 < \varkappa = \frac{L}{\mu}$$

$$r^k = -\nabla f(x^k) = b - Ax^k$$

итерация метода $\quad x^{k+1} = x^k + \alpha\cdot d$

$$\alpha = \arg\min_{\alpha>0} f(x^{k+1}) \qquad \frac{\partial f}{\partial x^{k+1}}^T \cdot \frac{\partial x^{k+1}}{\partial \alpha} = 0$$

$$\nabla f(x^{k+1})^T \cdot d = 0$$

$$-r^{k+1\,T} \cdot d = 0$$

$$(A x^{k+1} - b)^T d = 0 \; ; \quad (A(x^k + \alpha d) - b)^T d = 0$$

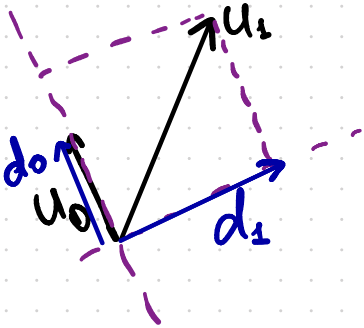
$$(-r^k + \alpha A d)^T d = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{d^T \cdot r^k}{d^T A d}}$$

Ортогонализация Грамма - Шмидта

Вход: $u_0, \dots u_{n-1}$ $\quad$ n ЛНЗ векторов

Выход: $d_0, \dots d_{n-1}$ $\quad$ n ЛНЗ $\perp$ векторов



$$d_0 = u_0$$

$$d_1 = u_1 - \Pi_{d_0}(u_1)$$

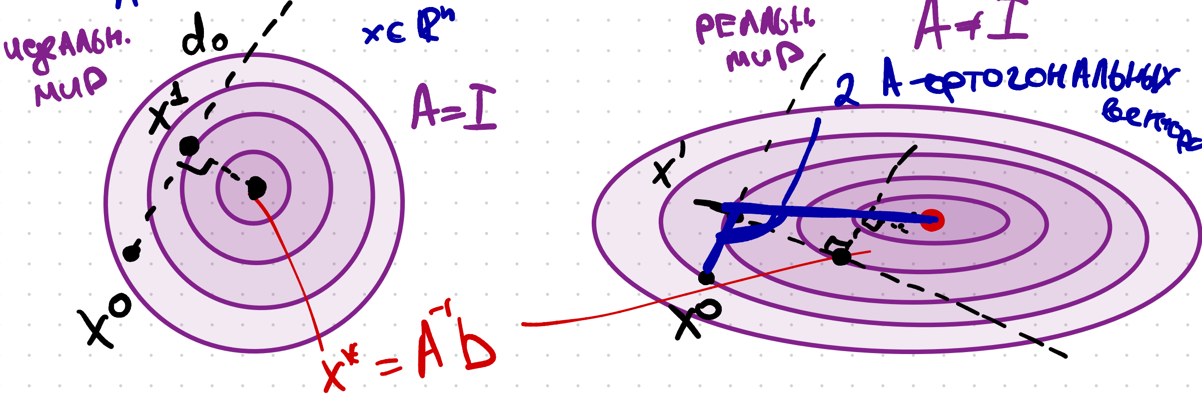
$$d_2 = u_2 - \Pi_{d_0}(u_2) - \Pi_{d_1}(u_2)$$

$$\Pi_{d_i}(u_k) = \frac{d_i^T u_k}{d_i^T d_i} d_i$$

$$d_k = u_k - \sum_{i=0}^{k-1} \Pi_{d_i}(u_k) =$$

$$= u_k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{ik} d_i$$

① $A \in \mathbb{S}^n_{++}$ $\quad \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T A x - b^T x + c$



2 итерации GD + line search

Меняем понятие ортогональности

A-ортогональность: $\quad d_1 \perp_A d_2 \iff d_1^T A d_2 = 0$

② Идея метода сопряжённых направлений:

n A-ортогональных направлений

+

процедура линейного поиска

||

сходимость за n итераций

обозначения $\quad r^k = b - Ax^k$ (residual)

$b - Ax^* = 0 \quad e^k = x^k - x^*$ (error)

$$\boxed{r^k = -Ae^k}$$

лемма $d_0, \dots, d_{n-1}$ n A-ортогональных напр.

$$x^{k+1} = x^0 + \sum_{i=0}^{k} \alpha^i d_i$$

α^i выбирается по процедуре Line Search

$$\boxed{\alpha^i = \frac{d_i^T r_i}{d_i^T A d}}$$

, то метод сойдется ровно за n итераций.

$$e^0 = x^0 - x^* = \sum_{i=0}^{n-1} \delta^i d^i \quad (*)$$

$$x^0 + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i d_i = x^*$$

фикс. k

умножаю на $\left(d_k^T A \cdot (*)\right)$

$$\delta^i = -\alpha^i$$

(из-за A-орт.)

$$d_k^T A e^0 = \sum_{i=0}^{n-1} \delta^i d_k^T A d_i$$

$$d_k^T A e^0 = \delta^k d_k^T A d_k$$

$$d_k^T A \underbrace{\left(e^0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i d_i\right)}_{e^k} = \delta^k d_k^T A d_k$$

$$e^k = e^0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i d_i$$

$$\delta^k = \frac{d_k^T A e^k}{d_k^T A d_k} = -\frac{d_k^T \cdot r^k}{d_k^T A d_k}$$

3) Идея CG:

метод сопряженных направлений

+

$d_0 \ldots d_{n-1}$ получаются с помощью

(GS) из лнз векторов $u_0 \ldots u_{n-1}$

+

в качестве $u_0 \ldots u_{n-1}$ выбираются

невязки $r_0 \ldots r_{n-1}$

(GS) Вход: $u_0 \ldots\ldots u_{n-1}$ n ЛНЗ

$$d_0 = u_0$$

$$d_1 = u_1 - \widetilde{\Pi_{d_0}(u_1)}$$

$$d_i = u_i + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} d_j \quad (GS)$$

$$(B) \quad \beta_{ij} = -\frac{u_i^T A d_j}{d_j^T A d_j}$$

(4.1)

$$\boxed{e^i = e^0 + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^j d_j} \;\textcircled{=}$$

$$e^0 = x^0 - x^* = -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j d_j$$

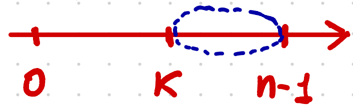
$$\textcircled{=} \sum_{j=0}^{n-1} -\alpha^j d_j + \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^j d_j =$$

$$= \boxed{\sum_{j=i}^{n-1} -\alpha^j d_j} \quad (ER)$$

4.2 (ER) для фикс. k

$$e^k = \sum_{j=k}^{n-1} -\alpha^j d_j \qquad \text{для какого-то } i \quad \left(-d_i^T A\right)\cdot$$

$$-d_i^T A e^k = \underline{\sum_{j=k}^{n-1} \alpha^j d_i^T A d_j}$$



если $i<k$

$$-d_i^T A e^k = 0$$

$$\boxed{d_i^T \cdot r^k = 0}$$

Таким образом r^k перпендикулярен всем предыдущим d_i

4.3 $r^{k^T}\cdot$ (GS)

$$d_i = u_i + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} d_j$$

$$r^{kT} d_i = r^{kT} u^i + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij} r^{kT} d_j$$

$j < i$