$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)}$$

Line search

Лин. поиск

мин. функции на отрезке

$$\boxed{\min_{a \le x \le b} f(x)}$$

Пример:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \cdot \nabla f(x^k)$$

Наискорейший спуск

$$\alpha^* = \underset{\alpha \ge 0}{\operatorname{argmin}}\, f(x^{k+1}) =$$

$$= \underset{\alpha \ge 0}{\operatorname{argmin}}\, f(x^k - \alpha \cdot \nabla f(x^k))$$

если

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \longrightarrow \boxed{\alpha^* = \frac{g^T g}{g^T A g}}$$

$$g = A x^k - b$$

если $f(x)$ не квадр.?

<u>Опр.</u> $f(x)$ – унимодальная на $[a;b]$ если

$\exists\, x^*$, что на отрезке $[a; x^*]$ $f(x)$ не возрас

на отрезке $(x^*; b)$ $f(x)$ не убывает

<u>Главная Лемма для унимод.:</u>

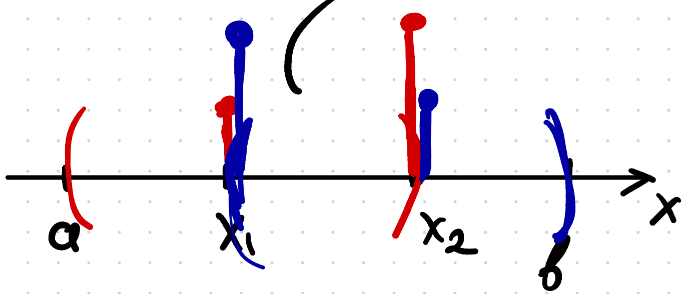
Пусть $f(x)$ – унимодальна на $[a;b]$

если $x_1 < x_2 \in [a;b]$

$f(x_1) \le f(x_2) \to x^* \in [a; x_2]$

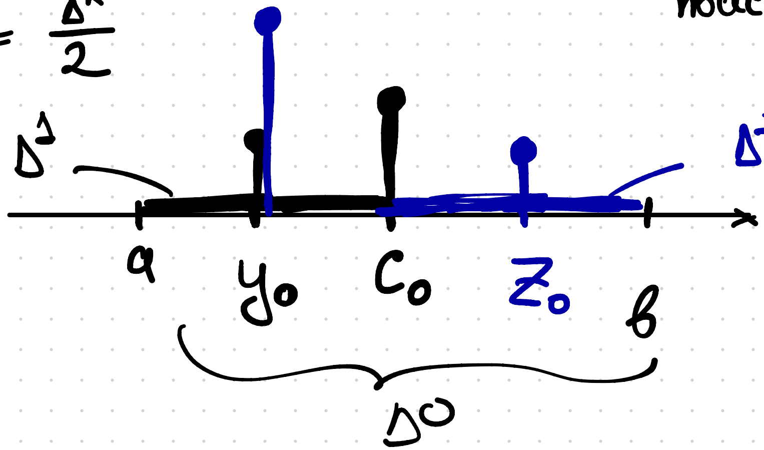
$f(x_1) \ge f(x_2)$

$\to x^* \in [x_1; b]$



Метод дихотомии на каждой итер хотим уменьшить отрезок поиска в 2 раза

$$\Delta^{k+1} = \frac{\Delta^k}{2}$$



сколько вызовов $f(x)$ на 1 итерации?

≤ 2 вызовов

оценка сх-ти метода

на k итерации отрезок Δ^k $\quad$ x^k - середина Δ^k

$$|x^0 - x^*| \le \frac{b-a}{2}$$

$$\boxed{q = \frac{1}{2}}$$

$$|x^k - x^*| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)\frac{1}{2^k}$$

$$|x^k - x^*| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(b-a) = \varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{\varepsilon}{b-a} \to k+1 = \log_{\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon}{b-a}$$

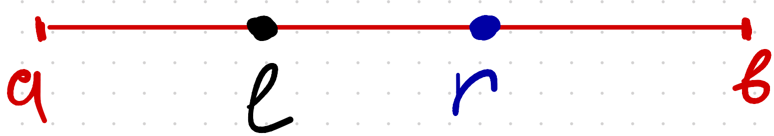
$$\boxed{K = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) - 1}$$ # итерац

f calls:

$$N \leq 2k \leq 2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) - 1.$$

Золотое сечение:

$$\frac{1}{r} = \frac{r}{1-r}$$



$$r = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \simeq 0.618$$

оценки сх-ти

$$\Delta^{k+1} \leq 0.618 \cdot \Delta^{k}$$

$$|x^{k} - x^{*}| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)(0.618)^{k}$$

$$|x^{N} - x^{*}| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)(0.618)^{N}$$

$$\boxed{q = 0.618}$$

$k = N$.

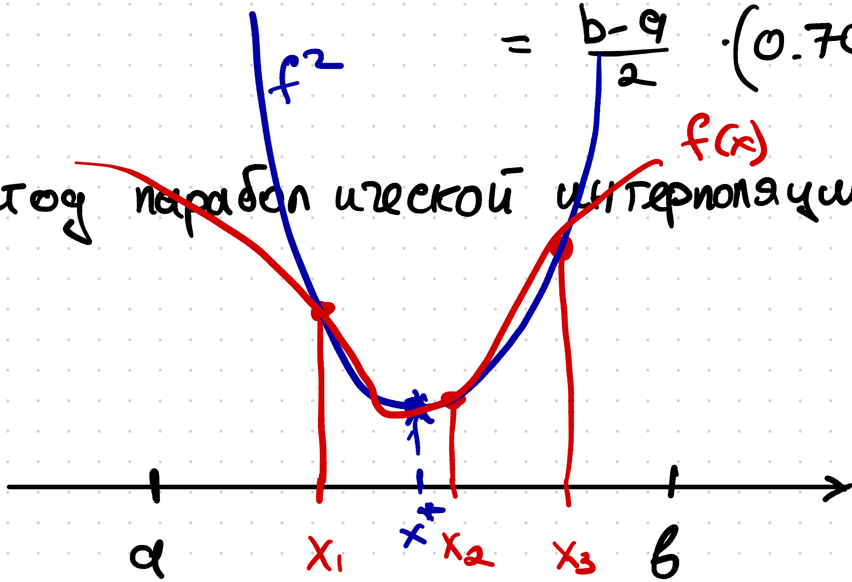
Вспомним для дихотомии:

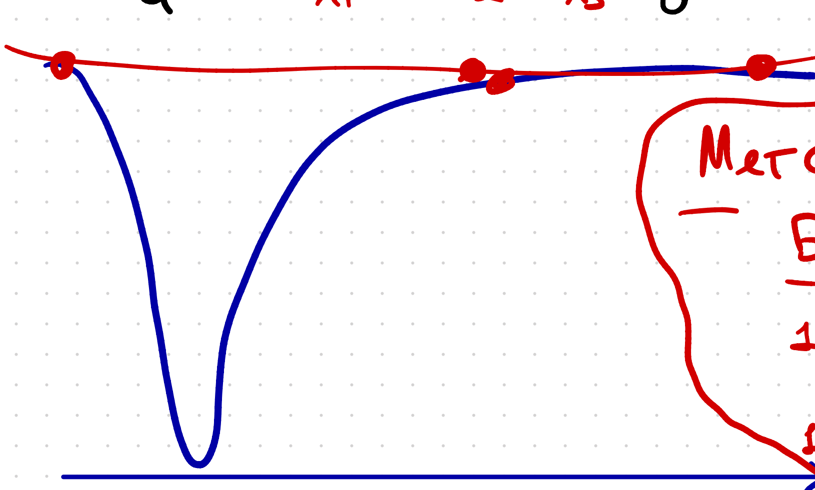
$$|x^{k} - x^{*}| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)(0.5)^{k}$$

$$|x^N - x^*| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)(0.5)^{\frac{N}{2}} = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left((0.5)^{\frac{1}{2}}\right)^N = \frac{b-a}{2}\cdot(0.707)^N$$

$$\boxed{q = 0.707}$$

Метод параболической интерполяции





Метод Брента

1 итер. параб. интерп.

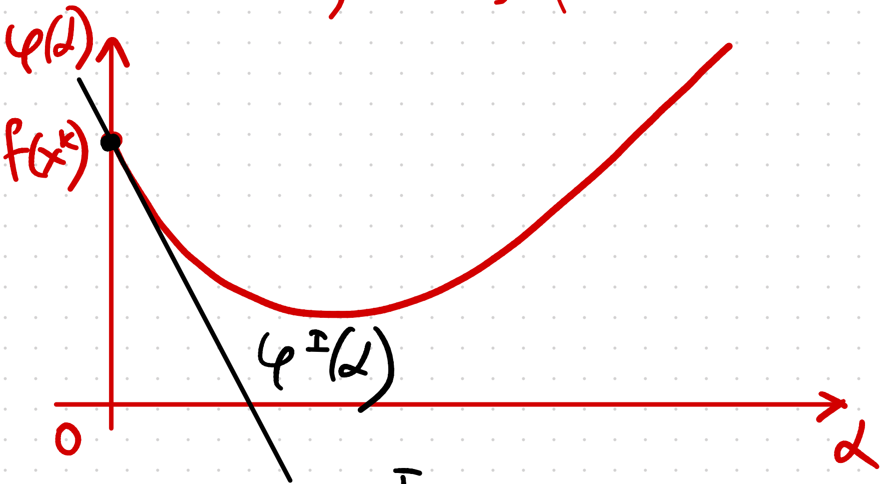
1 итер. зол. сечен.

При наборе некоторых предположений сх-ть – сверхлинейная

(НЕУСТОЙЧИВО НА ПРАКТИКЕ)

Неточный мин. поиск:

$$\varphi(\alpha) = f\left(x^k - \alpha \nabla f(x^k)\right)$$

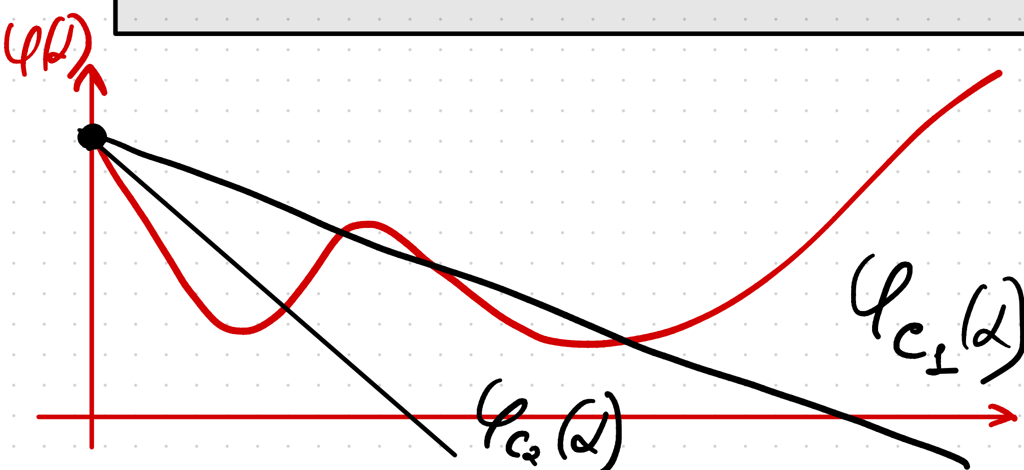


Рассмотрим $\varphi^I(\alpha)$ функции $\varphi(\alpha)$ окр. 0

$$\varphi^I(\alpha) = \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot (\alpha - 0) =$$

$$= f(x^k) + \alpha \cdot \left(-\nabla f(x^k)\right)^T \cdot \left(\nabla f(x^k)\right)$$

$$\boxed{\varphi^I(\alpha) = f(x^k) - \alpha \cdot \|\nabla f(x^k)\|^2}$$



$$\varphi_{c_1}(\alpha) = f(x^k) - \alpha \cdot c_1 \cdot \|\nabla f(x^k)\|^2$$

backtracking line search

α^0 $\qquad \varphi(\alpha^0) < \varphi_{c_1}(\alpha^0)$

если $\rightarrow$ $\alpha^{k+1} = \beta \cdot \alpha^k$

$\beta > 1$

$(\beta = 1.5)$

можно ещё $\varphi_{c_2}(\alpha)$

$$\boxed{\varphi_{c_2}(\alpha) \le \varphi(\alpha) \le \varphi_{c_1}(\alpha)}$$