LP. simplex.

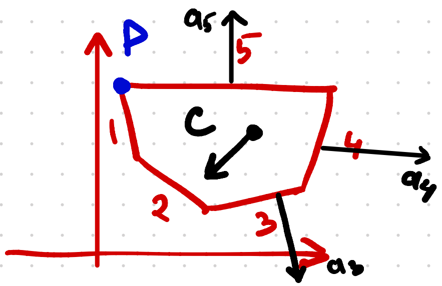
⓪ $$c^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (LP) \rightleftarrows \text{Dual } LP$$

Утв 1 Если LP имеет конечное решение, то (Dual LP) тоже имеет конечное решение + имеется сильная двойств.

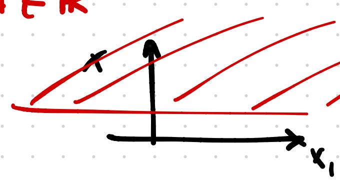
Утв 2 Если одна из (LP); (Dual LP) не ограничена, то бюджетное мн-во другой пусто

① $\{1,5\} \leftarrow$ БАЗИС $\quad P \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_5^T \end{pmatrix}$

$$c^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad Ax \leq b \quad (P) \qquad \underset{m \times n}{A} = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \ m \text{ строк}$$



$A \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$



← НЕТ УГЛ. ТОЧКИ

$x \geq 0$

Опр. 1 Угловая точка в задаче LP – точка бюджетного мн-ва, лежащая на ГРАНИЦЕ (КАК МИНИМУМ) n ЛНЗ ОГРАНИЧЕНИЙ

Опр. 2 Базис — набор векторов из матрицы A, n ЛНЗ задающих угловую точку

$$B = \{i, j\} \qquad x_B \qquad A_B \cdot x_B = b_B$$

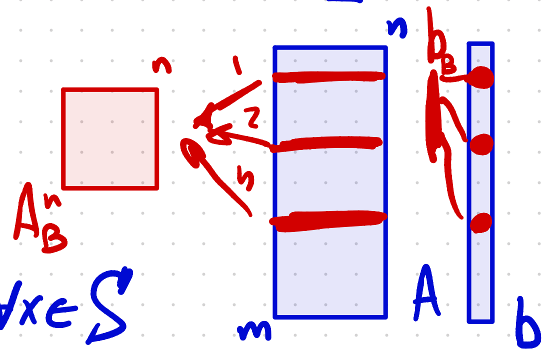
$$A_B = \begin{bmatrix} a_i^T \\ a_j^T \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad \boxed{x_B = A_B^{-1} \cdot b_B}$$

$$rg A_B = n$$

Опр. 3 Базис B называется допустимым, если x_B лежит в бюджетном мн-ве. $A x_B \leq b$

Опр. 4 Базис B называется оптимальным

$$c^T x_B \leq c^T x \quad \forall x \in S$$



Теорема: Пусть есть допустимый базис B

λ_B – коэф-ты разл вектора c в базис B

$$c = A_B^T \lambda_B = \sum_{i \in B} \lambda_i^B \cdot a_i$$

Если $\boxed{\lambda_B \leq 0}$, то B – оптимальный

$\exists\, x^* : Ax^* \leqslant b \quad + \quad c^T x^* < c^T x_B$

$\downarrow$

$\underbrace{A_B x^* \leqslant b_B}_{n \text{ нер-в}}$

$\lambda_B \leq 0 \quad \lambda_B \in \mathbb{R}^n$

$c^T = \lambda_B^T A_B$

$b_B = A_B x_B$

$\underbrace{\lambda_B^T A_B}_{} x^* \geqslant \lambda_B^T \overbrace{b_B}^{}$

$c^T x^* \geqslant \underbrace{\lambda_B^T A_B}_{} x_B$

$c^T x^* \geqslant c^T x_B$ противоречие

ч.т.д.

$\boxed{\text{ЗАМЕНА БАЗИСА}}$

пусть есть базис B $\quad c = A_B^T \lambda_B$

$\lambda_B \not\leq 0$

задача: B' : $\quad x_{B'} = x_B + \mu \cdot d$

Базис

B – НЕ оптимальный $\Rightarrow \exists\, k : \lambda_B^k > 0$

a_k

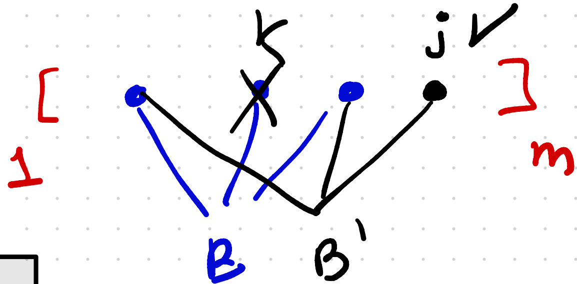
$$\begin{cases} \underset{n-1 \times n}{A_{B \setminus \{k\}}} \cdot \underset{n \times 1}{d} = 0 & \text{– НЕ МЕНЯЕМ ОСТАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ} \\ a_k^T \cdot d = -1 & \text{– уменьшаем ЗНАЧЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ} \end{cases}$$

$$x_B' = x_B + \mu \cdot d \qquad \tilde{A} = A_{B\setminus\{k\}}$$

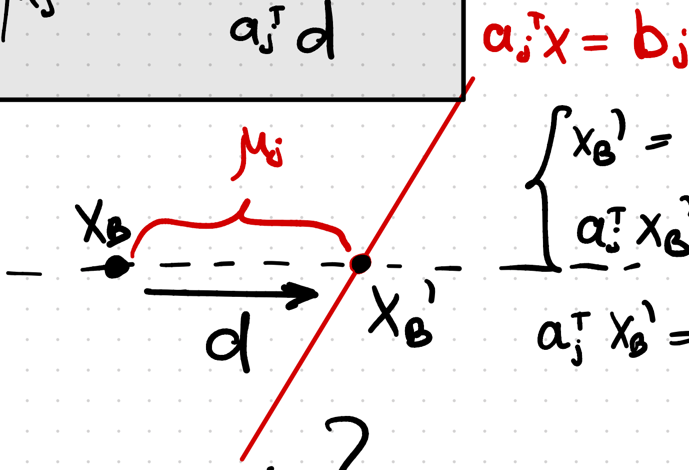
$$\tilde{A} x_B' = \tilde{A} x_B + \mu \underbrace{\tilde{A} d}_{=0}$$

$$\tilde{A} x_B' = \tilde{A} x_B$$

КАК ИСКАТЬ μ?



$$\boxed{\mu_j = \frac{b_j - a_j^T x_B}{a_j^T d}}$$



$$\begin{cases} x_B' = x_B + \mu_j d \;\; \Big| \cdot a_j^T \\ a_j^T x_B' = b_j \end{cases}$$

$$a_j^T x_B' = a_j^T x_B + \mu_j a_j^T d$$

КАКОЙ j?

$$j = \arg\min_{t \in [1;m]\setminus\{B\}} \{\mu_t \mid \mu_t > 0\}$$

Алгоритм. $c^T x \to \min$

$Ax \le b$

Шаг 1 Выбрать допустимый базис B_k $\Rightarrow$ $\boxed{x_k = A_{B_k}^{-1} b_{B_k}}$

НЕТРИВИАЛЬНО

Шаг 2 Разложить c в выбранный базис B_k

$$c = A_{B_k}^T \cdot \lambda_{B_k} \qquad \boxed{\lambda_{B_k} = A_{B_k}^{-T} c}$$

Шаг 3 Проверка оптимальности

$$\boxed{\lambda_{B_k} \ge 0}$$

да

$x^* = x_k$

нет

ЗАМЕНА БАЗИСА (вык инд p добавл инд t)

$$x_{k+1} = x_k + \mu_k d_k \leftarrow d_k \quad \begin{cases} A_{B_k \setminus \{p\}} \cdot d_k = 0 \\ a_p^T d_k = -1 \end{cases}$$

$$t = \arg\min_j \left\{ \frac{b_j - a_j^T x_p}{a_j^T d_k} = \mu_j \;\middle|\; \mu_j > 0 \right\}$$

$$\boxed{\mu_k = \frac{b_t - a_t^T x_k}{a_t^T d_k}}$$

Возврат на шаг 2

- Прим. может быть все $\mu_j = \infty$ – ЗАДАЧА НЕ ОГРАНИЧ.
- Прим. на каждом шаге целевая функция уменьшается на $\boxed{\mu_k c^T d_k}$