Двойственность. Финал

① Анализ чувствительности

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (P)$$
$$f_i(x) \leq 0$$
$$h_j(x) = 0$$

p^*

$$f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad (*)$$
$$f_i(x) \leq u_i$$
$$h_j(x) = v_j$$

опт. решение $(*)$

$p^*(u,v)$

$p^*(0,0) = p^*$

FUN FACT: если (P) – COP, то $p^*(u,v)$ – выпуклая по u, v

$u_i = 0 \to$ исх. задача

$u_i > 0 \to$ условие i ослабилось

$u_i < 0 \to$ условие i усилилось

Докажем нер-во:

Если есть сильная двойственность в (P):

$$\boxed{p^*(u,v) \geq p^* - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v} \quad \text{(SENS)}$$

λ^*, ν^* – опт. решение двойств задачи

$$\underbrace{p^* = d^*} = g(\lambda^*, \nu^*) \leq$$

$$\leq f_0(x) + \lambda^{*T} f(x) + \nu^{*T} h(x) \leq$$

$x \in$ в бюджетном мн-ве возм. задачи $(*)$

$$\leq f_0(x) + \lambda^{*T} \cdot u + \nu^{*T} \cdot v$$

$$\Rightarrow f_0(x) \geq p^* - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v$$

$\forall x \in$ бюдж. мн-ва (*)

$$\boxed{p^*(u,v) \geq p^* - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v}$$

i-ое огр. нер-во активно

$\lambda_i > 0$

пусть λ_i - большое

$u_i < 0$

$$p^*(u,v) \geq p^* - \underset{\vee\, 0}{\lambda_i} \cdot \underset{\wedge\, 0}{u_i} \geq p^*$$

(2) имеется сильная двойственность

Локальный анализ чувствительности задачи:

$$\boxed{\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} = -\lambda_i^* ; \quad \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_j} = -\nu_j^*}$$

док-во: рассмотрим возмущение i-ого огранич.

пусть $p^*(u,v)$ дифф. в нуле $\quad u_i \neq 0 \quad v = 0$

согласно (SENS):

$$\frac{p^*(0 + t \cdot e_i, 0) - p^*(0,0)}{t} \geq$$

e_i - i-ый един. вектор

$$\frac{p^*(0,0) - \lambda_i^* \cdot t - p^*(0,0)}{t} \geq -\lambda_i^*$$

$t > 0$ $\quad \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{p^*(t \cdot e_i, 0) - p^*(0,0)}{t} \geq -\lambda_i$

$\underline{t < 0}$ $\quad p^*(t e_i, 0) - p^*(0,0) \geq -\lambda_i^* t \quad | : t$

$$\lim_{t \to -0} \frac{p^*(t e_i, 0) - p^*(0,0)}{t} \leq -\lambda_i^*$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} = -\lambda_i^*}$$

③ Бизнес

$x \in \mathbb{R}^n$ – как функц. предприятия

$f_0(x)$ – стоимость функционирования предприятия

$-f_0(x)$ – прибыль предприятия

$f_i(x) \leq 0$ – ограничения ресурсов

$$\boxed{\begin{aligned} & f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ & f_i(x) \leq 0 \end{aligned}} \quad (B)$$

$L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda^T f(x)$

стоимость функц. предприятия при условии, что возможно нарушать ограничения со штрафом λ

$$g(\lambda) = \inf_x L(x, \lambda)$$

наилучшая стоимость при заданных штрафах λ

двойственная задача

$$g(\lambda) \to \max_\lambda$$
$$\lambda \geq 0$$

d^* — опт. решение двойств. задачи

наилучшая стоимость при наиболее вражд. штрафах

если в бизнесе есть сильная двойственность (B)

$$\frac{\partial p^*(u)}{\partial u_k}(u=0) = -\lambda_k^*$$

$p^*(u)$

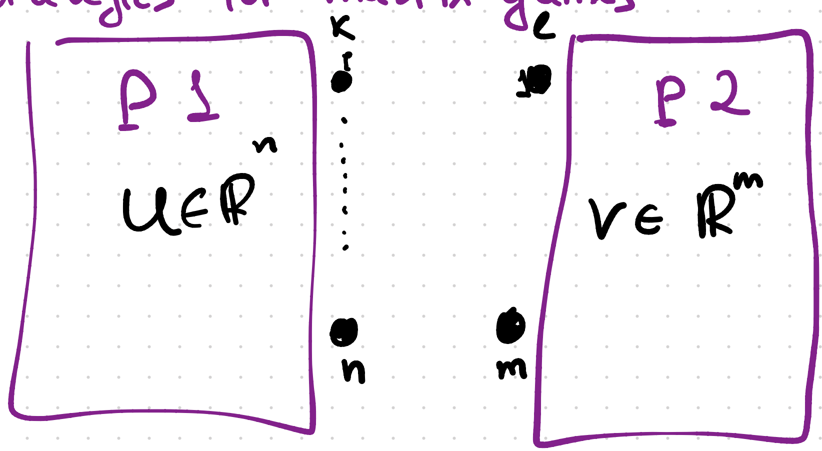
в начале $p^*(0) = p^*$

$p^*(u = \frac{1}{100})$ чуть меньше p^*

поэтому λ^* - SHADOW PRICES

(теневые цены)

Mixed strategies for matrix games



P1 делает шаг $k \in [1, n]$ с вер-того u_k

$$1^T u = 1 \qquad u \geq 0$$

P2 делает шаг $l \in [1, m]$ с вер-того v_l

$$P1 \xrightarrow{\text{платит}} P2$$

деньги

P_{kl} ← матрица размера $n \times m$

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} u_k v_l \cdot P_{kl}$$ — мат. ожидание того, сколько денег

$$\downarrow$$

$$\underset{1\times n}{u^T} \; \underset{n \times m}{P} \; \underset{m \times 1}{v}$$

Давайте рассмотрим игру ст. 3. P1:

и известен P2

$(P^T u)^T \cdot v$

$$\boxed{\begin{aligned} u^T P v &\to \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^m \\ v \geq 0 \\ 1^T v = 1}} \end{aligned}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (P^T u)_i \cdot v_i \to \max_{\substack{v \in \mathbb{R}^m \\ v \geq 0 \\ 1^T v = 1}}$$

$$\Rightarrow \quad (P^T u)_i \to \max_{i \in 1, m}$$

тогда P1

$$\boxed{\min_{\substack{u \geq 0 \\ 1^T u = 1}} \max_i (P^T u)_i}$$

(Pr 1)

P_1^*

Давайте рассмотрим игру ст. 3 P2:

$$\boxed{\begin{aligned} &\max_{v \in \varrho} \min_i (Pv)_i \\ &1^T v = 1 \\ &v \geq 0 \end{aligned}}$$

$(Pr\,2)$

p_2^*

$$\boxed{p_2^* \leq p_1^*}$$

по построению

ОКАЗЫВАЕТСЯ $(Pr\,1)$ и $(PR\,2)$ двойственны друг к другу

имеется сильная двойственность

к другу

$$\boxed{p_1^* = p_2^*}$$

$(PR\,1)$:

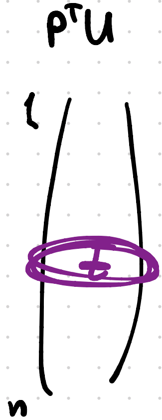
$$\begin{aligned} &\min_{u \geq 0} \max_i (P^T u)_i \\ &1^T u = 1 \end{aligned}$$

$(Pr\,1)$

p_1^*

$$\min t$$
$$u \succeq 0$$
$$1^T u = 1$$
$$P^T u \preceq t \cdot 1$$

ед. вектор



$$L = t + \lambda^T (P^T u - t \cdot 1) - \mu^T \cdot u + \nu (1 - 1^T u) =$$

$$= \nu + (1 - 1^T \lambda) t + (P\lambda - \nu \cdot 1 - \mu)^T \cdot u$$

$$g(\lambda, \mu, \nu) = \inf_{t,u} L = \begin{cases} \nu, & 1 = 1^T \lambda \\ & P\lambda - \nu \cdot 1 = \mu \end{cases}$$

$$g(\lambda, \mu, \nu) \to \max_{\lambda, \mu, \nu}$$

$$\nu \to \max_{\substack{\lambda \geq 0 \\ \mu \succeq 0 \\ 1^T \lambda = 1 \\ P\lambda - \nu \cdot 1 = \mu}}$$

$$\partial \longrightarrow \max$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\mathbf{1}^T \lambda = 1$$

$$P\lambda \succeq \partial \cdot \mathbf{1}$$